

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тулский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и
конструкции»
«18» января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе студентов
по дисциплине
«Методы решения краевых задач
механики деформируемого твердого тела»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры**

по направлению подготовки
08.04.01 «Строительство»

с направленностью (профилем)
Теория и проектирование зданий и сооружений

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-04-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Теличко В.Г., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

I Цель и задачи самостоятельной внеаудиторной работы студента

Выполнение самостоятельной работы преследует цель практической отработки алгоритмов деятельности, касающихся вопросов решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, а также вопросов реализации соответствующих методов на ЭВМ с применением специализированных прикладных пакетов и языков программирования высокого уровня.

II Содержание вопросов самостоятельной работы

Вопросы, выносимые на самостоятельную проработку, изучаются по учебникам и конспектируются в течение семестра параллельно с аудиторными занятиями, выносятся на зачет и содержатся в тестах.

Очная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
3 семестр	
1	Выполнение контрольно-курсовой работы
2	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
3	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

Заочная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
3 семестр	
1	Выполнение контрольно-курсовой работы
2	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
3	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

ВВЕДЕНИЕ

Целью самостоятельной работы по дисциплине является *расширение* представления о применяемых методах решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела.

При самостоятельном изучении материала рекомендуется использовать не только источники информации, материалы из которых приведены в качестве ориентировочной основы, но и книги, указанные в библиографическом списке.

Как и при подготовке к практическим занятиям, основными вопросами являются следующие:

1. Какова основная идея метода решения краевой задачи?
2. Каков алгоритм реализации метода?
3. Какие ограничения накладываются на математическую задачу при реализации алгоритма метода?
4. Как осуществляется контроль достоверности получаемого результата?

Контроль уровня самостоятельно усвоенных знаний проводится в ходе текущего тестового контроля (не менее 20 тестовых заданий), в ходе которого студент может получить до 24 баллов.

ТЕМА 1

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Тематика самостоятельной работы рабочей программой не предусмотрена.

ТЕМА 2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

2.2. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Применение *одинарных* тригонометрических рядов рассматривается на примере решения краевой задачи для прямоугольной области. В качестве задачи МДТТ взята задача об изгибе тонкой прямоугольной плиты, нагруженной произвольно распределённой нагрузкой интенсивности $q(x, y)$.

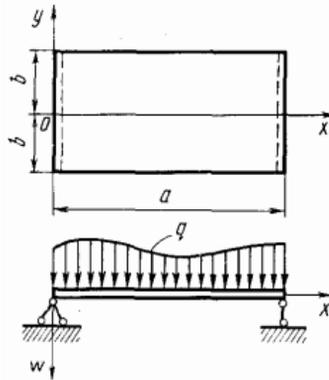


Рис. 2.1. Тонкая плита с шарнирным опиранием по двум сторонам

Математическая модель задачи включает дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (2.1)$$

и граничные условия

$$u \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0. \quad (2.2)$$

При $y = \pm b$ граничные условия могут быть любыми, но независимыми от x .

Решение задачи ищется в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin(m\pi x/a). \quad (2.3)$$

Функция нагрузки также представляется в виде ряда Фурье по координате x :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin(m\pi x/a), \quad (2.4)$$

где коэффициенты ряда $q_m(y)$ определяются по формуле:

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin(m\pi x/a) dx. \quad (2.5)$$

Дальнейшие действия по решению задачи включает подстановку (2.3) в уравнение (2.1), использование представления (2.4) в полученном выражении и последующее формирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_m^{IV}(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y) = \frac{q_m(y)}{D} \quad (2.6)$$

$(m = 1, 2, \dots)$

с теми же граничными условиями для $f_m(y)$ при $y = \pm b$, что и для функции прогибов w .

Общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (2.6), имеет вид

$$f_m^0(y) = B_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m y + B_{2m} \operatorname{sh} \alpha_m y + B_{3m} \operatorname{ch} \alpha_m y + B_{4m} \operatorname{sh} \alpha_m y,$$

где обозначено $\alpha_m = m\pi/a$, $m = 1, 2, \dots$

Частное решение $f_m^*(y)$ находится любым из известных способов.

Все решения уравнения (2.6) имеют вид

$$f_m(y) = f_m^0(y) + f_m^*(y), \quad (2.7)$$

а решение поставленной задачи определяется подстановкой значений $f_m(y)$ в ряд (2.3).

2.4. Методы сведения многомерных краевых задач к одномерным

Метод прямых

Рассматривается метод прямых сведения дифференциального уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод прямых можно рассматривать как предельный случай метода сеток, если при использовании прямоугольной сетки шаг её по оси x стремиться к нулю.

Метод демонстрируется на примере решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.8)$$

в прямоугольной области $[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, c) &= \varphi_0(x); \quad u(x, d) = \varphi_1(x); \\ u(a, y) &= \psi_0(y); \quad u(b, y) = \psi_1(y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

Согласно процедуре применения метода представим производную разностным соотношением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} \Big|_{y=y_k} = \frac{1}{h^2} (u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)) \quad (2.10)$$

что позволяет получить систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$u_k''(x) + \frac{1}{h^2} (u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)) = f_k(x) \quad (2.11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_k(a) &= \psi_0(y_k), u_k(b) = \psi_1(y_k); \\ u_0(x) &= \varphi_0(x), u_k(x) = \varphi_1(x); \\ k &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Общее решение этой системы уравнений известно в форме

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{\pi i (y_k - c)}{d - c} (A_i e^{\delta_i x} + B_i e^{-\delta_i x}) \quad (2.13)$$

Здесь использованы обозначения

$$\delta_i = \frac{2}{h} \sin \left[\frac{\pi (y_i - c)}{2(d - c)} \right]; \quad A_i, B_i = \text{const}. \quad (2.14)$$

Метод прямых удобно применять, когда в операторном уравнении

$$L[u(x, y)] = f(x, y), \quad (2.15)$$

удовлетворяющем граничным условиям (2.12), коэффициенты не зависят от x .

Метод
Власова-
Канторовича

Метод предлагает сведение краевой задачи для уравнений в частных производных к краевым задачам для обыкновенных уравнений. При этом используется та же идея, что и в методе минимизации невязки.

Однако в отличие от метода минимизации невязки в качестве коэффициентов аппроксимирующих функций $\varphi_k(x, y)$ принимают не неизвестные постоянные, а неизвестные функции одной из независимых переменных, которые определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод отличается большей точностью в сравнении с методами, в которых задача сводится к системе алгебраических уравнений.

Решение по этому методу задачи, определяемой уравнением (2.15) при условиях (2.12) предлагается искать в виде

$$u_n(x, y) = Y_0(y) + \sum_{k=1}^n X_k(x) Y_k(y), \quad (2.16)$$

где $X_k(x)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая граничным условиям (2.12) по переменной x ; $Y_0(y)$, $Y_k(y)$ – известные функции, удовлетворяющие *соответственно* неоднородным и однородным граничным условиям (2.12) по переменной y .

Определение функций $X_k(x)$ производится в ходе составления условия ортогональности невязки и функции $Y_k(y)$, которое в данном случае имеет вид

$$\int_c^d (L(u_n(y, y)) - f(x, y)) Y_k(y) dy = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.17)$$

Выполняя интегрирование, из (2.17) формируют систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $X_k(x)$.

В качестве примера рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \quad (2.18)$$

в прямоугольной области $[-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq d]$ с границей Γ при условии $u|_{\Gamma} = 0$.

Используя форму решения (2.16) для $Y_0(y) = 0$ и $k = 1$, а также граничные условия на контуре области, представим решение в первом приближении в форме

$$u_1 = Y_1(y) X_1(x) = (b^2 - y^2) X(x). \quad (2.19)$$

Система (2.17) в этом случае сводится к одному уравнению:

$$\int_{-b}^b (X''(x)(b^2 - y^2)(-2X(x)) + 1)(b^2 - y^2) dy = 0. \quad (2.20)$$

Выполняя предписанные в (2.20) вычисления, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X''(x) - \frac{5}{2b^2} X(x) = -\frac{5}{4b^2}, \quad (2.21)$$

которое, с учётом граничных условий, имеет решение

$$X(x) = -\frac{1}{4 \operatorname{ch} x^{a\sqrt{2.5}/b}} (e^{x\sqrt{2.5}/b} + e^{-x\sqrt{2.5}/b}) + \frac{1}{2}. \quad (2.22)$$

Окончательное выражение решения дифференциального уравнения (2.18) получаем, подставив (2.22) в (2.19):

$$u_1 = (b^2 - y^2) \left(-\frac{1}{4 \operatorname{ch} x^{a\sqrt{2.5}/b}} (e^{x\sqrt{2.5}/b} + e^{-x\sqrt{2.5}/b}) + \frac{1}{2} \right)$$

ТЕМА

3

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

3.1. МКЭ как метод Ритца

Рассмотрим этот метод на примере определения прогиба жестких прямоугольных пластин. Пусть она изгибается под действием *произвольной* поперечной нагрузки $q(X, Y)$. Разобьем пластинку на n прямоугольных конечных элементов со сторонами a и b .

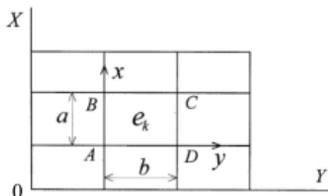


Рис. 3.1. Разбиение пластины на конечные элементы e_k .

В каждом из узлов будем считать реализующимися три степени свободы:

1. Малый прогиб пластины w вдоль оси z локальной оси координат (x, y, z) .
2. Малый угол поворота вокруг оси $x - \partial w / \partial x$.
3. Малый угол поворота вокруг оси $y - \partial w / \partial y$.

Таким образом, отдельный КЭ должен иметь *двенадцать* степеней свободы, которые обозначим как q_i .

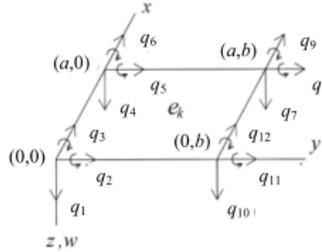


Рис. 3.2. Степени свободы отдельного КЭ в локальной системе координат (x, y, z) .

На эти степени свободы налагается ограничение в виде требования *совместности* трёх степеней свободы каждого узла дискретизации КЭ, который является общим для любого количества элементов.

Перемещение, определяемое степенью свободы q_i между узловыми точками на конечном элементе e_k зададим *многочленом* $\varphi_i(x, y)$ так, чтобы прогиб на этом КЭ определялся соотношением

$$W_k(x, y) = \sum_{i=1}^{12} q_i \varphi_i(x, y), \quad (x, y) \in e_k \quad (3.1)$$

Важно отметить, что представление (3.1) определяется только для одного элемента, так что для других КЭ эта функция определена *как нулевая*.

В нашем примере локальная система координат на отдельном элементе отличается от глобальной только положением в плоскости (X, Y) . Так что установление связи

между координатными система требует только параллельного переноса осей локальной системы.

Предполагая, что каждый из n КЭ делает вклад в создание прогиба, его функцию в ГСК можно представить в форме:

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^n W_k(x, y). \quad (3.2)$$

Далее запишем полную энергию деформации пластинки, состоящей из конечных элементов

$$\int_0^1 \frac{D}{2} \iint_{V_k} \left\{ (\nabla W_k)^2 + 2(1-\mu)[W_{k,XY}^2 - W_{k,X}^2 \cdot W_{k,Y}^2] - 2\frac{q}{D} W_k \right\} dx dy$$

Здесь V_k – область, занимаемая одним КЭ.

Для формирования системы алгебраических уравнений относительно неизвестных значений узловых пере-

мещений (степеней свободы) $\sum_{m=1}^K a_{mi} q_i = b_m$ можно ис-

пользовать метод Ритца:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_s} = 0, \quad (3.3)$$

где $s = 1, 2, \dots, K$ – число степеней свободы внутренних узлов ансамбля из n конечных элементов ($K = 3(n-1)^2$).

В этой систем:

$$a_{mi} = a_{im} = \int_0^l EI \varphi_i''(x) \varphi_m''(x) dx; \quad b_m = \int_0^l q(x) \varphi_m(x) dx. \quad (3.4)$$

Всего же неизвестных параметров q_s будет $3(n+1)^2$.

Недостающее число уравнений для определения q_s получается из краевых условий, число которых определяется как $3 \cdot 2 \cdot (n+1)$.

Таким образом, метод конечных элементов совпадает с методом Ритца при дискретной аппроксимации неизвестных функций.

3.2. Матрица жёсткости четырёхугольного элемента пластины

Далее рассматриваются пластины принимаются справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява, а материал считается идеально упругим и ортотропным. Гипотеза о нормальном элементе в простейшем случае приводит к трем степеням свободы в узле: смещение срединной поверхности и повороты соответственно в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

За положительный принят прогиб, направленный вниз. Положительные углы поворота отсчитываются по ходу часовой стрелки относительно оси X и против хода часовой стрелки относительно Y , если смотреть вдоль осей из начала координат.

Следствием принятых допущений будет матрица жёсткости четырёхугольного КЭ размером 12×12 .

Кубический биполином, удовлетворяющий однородному дифференциальному уравнению изгибаемой пластины (т.е. определяющий функцию прогибов плиты) имеет вид:

$$Z(x, y) = f_1 + f_2x + f_3y + f_4x^2 + f_5y^2 + f_6xy + f_7x^2y + f_8xy^2 + f_9x^3 + f_{10}y^3 + f_{11}x^3y + f_{12}xy^3. \quad (3.5)$$

С помощью этого полинома матрица жёсткости 12-го порядка для k -го элемента может быть получена по формуле

$$r_k = \int_V (A^{-1})^* B^* C B A^{-1} dV \quad (3.6)$$

Используемые в (3.6) матрицы определены следующим образом:

- матрицу A строят простой подстановкой координат узлов в принятую функцию перемещений (3.5); матрица является квадратной, так как число узловых перемещений равно числу компонентов перемещений КЭ;
- по функциям, определяющим зависимость (3.5) от узловых перемещений f_j строят матрицу деформаций B ;
- матрица C является матрицей жесткости бесконечно малого элемента, связывающей компоненты вектора узловых усилий и деформаций.

Примем обозначения для жёсткостей плиты :

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)},$$
$$D_{\kappa} = \frac{Gh^3}{6}, D_{\nu} = \nu_x D_x = \nu_y D_y; \quad (3.7)$$
$$m = \frac{b}{a}, (a, b, h) - \text{размеры пластины.}$$

В этих обозначения значения элементов матриц жёсткости прямоугольного элемента имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 r_{11} = r_{44} = r_{77} = r_{10\ 10} &= \frac{4mD_x}{a^2} + \frac{4D_y}{mb^2} + \frac{2D_v}{ma^2} + \frac{14D_\kappa}{5ma^2}; \\
 r_{12} = -r_{45} = -r_{78} = r_{10\ 11} &= \frac{2mD_x}{a} + \frac{D_v}{b} + \frac{D_\kappa}{5b}; \\
 r_{13} = r_{46} = -r_{79} = -r_{10\ 12} &= \frac{2D_y}{mb} + \frac{D_v}{a} + \frac{D_\kappa}{5a}; \\
 r_{14} = r_{7\ 10} &= -\frac{4mD_x}{a^2} + \frac{2D_y}{mb^2} - \frac{2D_v}{ma^2} - \frac{14D_\kappa}{5ma^2}; \\
 r_{15} = -r_{24} = -r_{7\ 11} = r_{8\ 10} &= \frac{2mD_x}{a} + \frac{D_\kappa}{5b}; \\
 r_{16} = r_{34} = -r_{7\ 12} = -r_{9\ 10} &= \frac{D_y}{mb} - \frac{D_v}{a} - \frac{D_\kappa}{5a}; \\
 r_{17} = r_{4\ 10} &= -\frac{2mD_x}{a^2} - \frac{2D_y}{mb^2} + \frac{2D_v}{ma^2} + \frac{14D_\kappa}{5ma^2}; \\
 r_{18} = -r_{27} = -r_{4\ 11} = r_{5\ 10} &= \frac{mD_x}{a} - \frac{D_\kappa}{5b}; \\
 r_{19} = -r_{37} = r_{4\ 12} = -r_{6\ 10} &= \frac{D_y}{mb} - \frac{D_\kappa}{5a}; \\
 r_{1\ 10} = r_{47} &= \frac{2mD_x}{a^2} - \frac{4D_y}{mb^2} - \frac{2D_v}{ma^2} - \frac{14D_\kappa}{5ma^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{111} = r_{210} = -r_{48} = -r_{57} &= \frac{mD_x}{a} - \frac{D_v}{b} - \frac{D_k}{5b}; \\
r_{112} = -r_{310} = r_{49} = -r_{67} &= \frac{2D_y}{mb} + \frac{D_k}{5a}; \\
r_{22} = r_{55} = r_{88} = r_{1111} &= \frac{4mD_x}{3} + \frac{4D_k}{15m}; \\
r_{23} = -r_{56} = r_{89} = -r_{1112} &= D_v; \\
r_{25} = r_{811} = \frac{2mD_x}{3} - \frac{D_k}{15m}; & \quad r_{28} = r_{511} = \frac{mD_x}{3} + \frac{D_k}{15m}; \\
r_{211} = r_{58} = \frac{2mD_x}{3} - \frac{4D_k}{15m}; & \quad r_{36} = r_{912} = \frac{2D_y}{3m} - \frac{4mD_k}{15}; \\
r_{39} = r_{612} = \frac{D_y}{3m} + \frac{mD_k}{15}; & \quad r_{312} = r_{69} = \frac{2D_y}{3m} - \frac{mD_k}{15}; \\
r_{33} = r_{66} = r_{99} = r_{1212} &= \frac{4D_y}{3m} + \frac{4mD_k}{15},
\end{aligned}$$

Отсутствующие элементы определяются свойством симметрии матрицы жёсткости.

ТЕМА

4

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В МЕХАНИКЕ

Тематика самостоятельной работы рабочей программой не предусмотрена.

ТЕМА

5

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

5.3. Пример решения геометрически нелинейных задач теории пластин и пологих оболочек

Требуется провести расчёт квадратной *пологой* оболочки положительной гауссовой кривизны, шарнирно закреплённой по контуру и находящейся под действием *равномерно* распределённой нагрузки q , при разных значениях радиуса кривизны $R_x = R_y = R$.

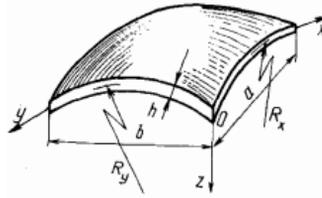


Рис. 5.1. Геометрическая схема оболочки в осях, направленным по главным кривизнам

Предполагаются справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява и принимается, что прогибы оболочки *соизмеримы* с её толщиной.

Материал оболочки подчиняется закону Гука, а деформации описываются геометрически нелинейной теорией.

Срединная поверхность оболочки принимается за координатную поверхность.

Связь деформаций и перемещений:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2;$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Закон Гука:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^z + \nu\varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^z + \nu\varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^z.$$

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y},$$

$$k_x = \frac{1}{R_x}, \quad k_y = \frac{1}{R_y}.$$

Усилия и моменты на единичной длине сечения, приведенные к срединной поверхности оболочки:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz,$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz.$$

Уравнения равновесия оболочки:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0;$$

$$N_x \left(k_x + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + N_y \left(k_y + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0.$$

Граничные условия (с вариантами опирания):

• при $x = 0, x = a$

$$N_x = 0 \text{ или } u = u^*; \quad N_{xy} = 0 \text{ или } v = v^*;$$

$$N_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ или } \omega = \omega^*;$$

$$M_x = 0 \text{ или } \frac{\partial \omega}{\partial x} = \theta_1.$$

- при $y = 0, y = b$

$$N_{xy}=0 \text{ или } u=u^*; N_y=0 \text{ или } v=v^*;$$

$$N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \text{ или } w=w^*;$$

$$M_y=0 \text{ или } \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_2.$$

- в угловых точках

$$x = 0: y = 0 \text{ или } y = b,$$

$$x = a: y = 0 \text{ или } y = b;$$

$$M_{xy} = 0 \text{ или } w = w^*.$$

Для эффективности численного решения запишем уравнения равновесия через перемещения точек срединной поверхности, используя безразмерные переменные и параметры:

$$\nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad \nabla_2 = \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

$$\nabla_3 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad \nabla_4 = \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

$$\nabla_5 = k_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 k_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad k_1 = k_\xi + \nu \lambda^2 k_\eta;$$

$$k_2 = \nu k_\xi + \lambda^2 k_\eta; \quad \mu_1 = 0,5(1 - \nu); \quad \mu_2 = 0,5(1 + \nu);$$

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \bar{U} = Ua/h^2, \quad \bar{V} = Vb/h^2, \quad \bar{W} = W/h,$$

$$\bar{P} = a^4 q / (Eh^4), \quad k_\xi = a^2 / (R_x h), \quad k_\eta = b^2 / (R_y h), \quad \lambda = a/b;$$

U, V, W – перемещения точек срединной поверхности относительно осей глобальной системы координат (см. Рис. 5.1.).

Для решения сформулированной нелинейной задачи целесообразно использовать модификацию метода последовательных нагружений в форме с порядком точности $O(\Delta H^3)$:

$$\begin{aligned}
F'_U(U_n, H_n)\Delta U_n + F'_H(U_n, H_n)\Delta H_n &= 0; \\
F'_U(U_n + \Delta U_n/2, H_n + \Delta H_n/2)\Delta \bar{U}_n + F'_H(U_n + \\
&+ \Delta U_n/2, H_n + \Delta H_n/2)\Delta H_n = 0; \\
U_{n+1} &= U_n + \Delta \bar{U}_n, \quad H_{n+1} = H_n + \Delta H_n.
\end{aligned}$$

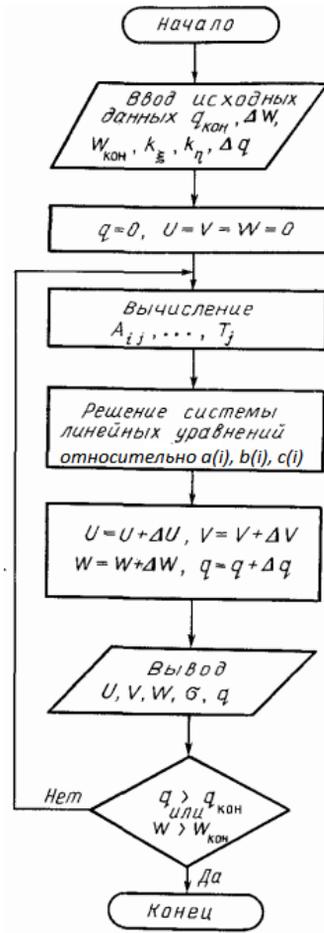
При этом на каждом k -этапе нагружения необходимо *два раза* решить систему линеаризованных уравнений задачи в виде

$$\begin{aligned}
&\nabla_1 u_k + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 v_k}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \nabla_1 w_k + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \\
&\quad + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} (\nabla_1 \bar{W}_k - k_1) + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial w_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} = 0; \\
&\mu_2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi \partial \eta} + \nabla_2 v_k + \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \nabla_2 w_k + \mu_2 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \\
&\quad + \mu_2 \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial w_k}{\partial \eta} (\nabla_2 \bar{W}_k - k_2) = 0; \\
12 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} (\nabla_3 \bar{W}_k - k_1) + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial u_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} + 12 \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \xi} \nabla_3 w_k + \\
&\quad + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda^2 k_2 \frac{\partial v_k}{\partial \eta} + 12 \lambda^2 \frac{\partial v_k}{\partial \eta} \nabla_4 \bar{W}_k + \\
&\quad + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial v_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \\
&\quad + 12 \lambda^2 \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \eta} \nabla_4 w_k - \frac{\partial^4 w_k}{\partial \xi^4} - 2 \lambda^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \lambda^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial \eta^4} - \\
&- 12 (k_\xi k_1 + \lambda^2 k_\eta k_2) w_k + 12 \lambda^2 k_2 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \frac{\partial w_k}{\partial \eta} + 12 k_1 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} + \\
&- 12 (\bar{W}_k \nabla_5 w_k + w_k \nabla_5 \bar{W}_k + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \eta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} + \\
&+ 12 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \nabla_3 \bar{W}_k + 6 \left(\frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \right)^2 \nabla_3 w_k + 6 \lambda^2 \left(\frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \right)^2 \nabla_4 w_k +
\end{aligned}$$

В этой системе использованы обозначения:

$$\bar{U}_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i; \quad \bar{V}_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i; \quad \bar{W}_k = \sum_{i=1}^{k-1} w_i; \quad \bar{P}_k = \sum_{i=1}^{k-1} p_i.$$

Эту систему уравнений в частных производных относительно функций перемещений методом Бубнова-Галёркина сводят к системе линейных алгебраических уравнений, для которых реализуется следующий алгоритм вычислений:



Согласно методу Бубнова-Галёркина, используюя аппроксимирующие функции, удовлетворяющие всем граничным условиям, в составе следующего представления искомых перемещений на k -ом шаге:

$$u_k = \sum_{i=1} a_i \varphi_i(\xi, \eta), \quad v_k = \sum_{i=1} b_i \psi_i(\xi, \eta),$$

$$w_k = \sum_{i=1} c_i \chi_i(\xi, \eta),$$

где суммирование ведётся до N , а коэффициенты сумм подлежат определению по в ходе реализации алгоритма.

Значения коэффициентов A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , ..., T_j зависят от исходных данных и от накопленных к k -му этапу значений \bar{U}_k , \bar{V}_k , \bar{W}_k , \bar{P}_k .

Численные результаты (в безразмерном виде) представлены графиком «нагрузка-прогиб»:

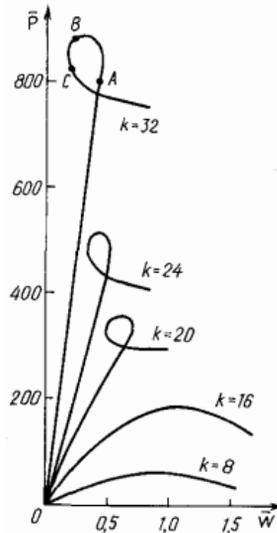


Рис. 5.2. Кривые «нагрузка-прогиб» решения геометрически нелинейной задачи о прогибах полой оболочки

5.4. Пример решения физически нелинейных задач

Требуется найти нормальные напряжения σ_x , возникающие при изгибе защемлённой полосы, нагруженной силой F на свободном конце.

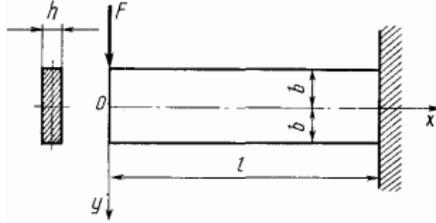


Рис. 5.3. Расчётная схема полосы

Будем считать, что используется материал, закон упругости которого может быть представлен в виде

$$k(s_0) = 1, g(t_0) = 1 + g_2 t_0^2; \quad s_0 = \frac{\sigma_0}{3K}, t_0 = \frac{\tau_0}{G}, \quad (5.1)$$

где (5.1) определяет функции среднего напряжения и интенсивности касательных напряжений.

При этом основные физические соотношения между деформациями и напряжения предполагаются представленными в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_x - \sigma_0); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_y - \sigma_0); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_z - \sigma_0); \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{xy}; \\ \psi_{yz} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{yz}; \\ \psi_{zx} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{zx}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Эти соотношения переходят в линейные при условии

$$k(s_0) = g(t_0^2) = 1.$$

Решать задачу будем с учётом того, что пластинка находится в плоском напряжённом состоянии:

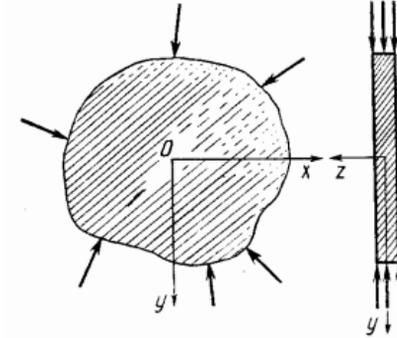


Рис. 5.4. Схема нагружения при плоском напряжённом состоянии

Это изменяет систему уравнений (5.2) к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_x - \sigma_0), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_y - \sigma_0), \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Введение функции напряжений Эри $\varphi(x, y)$ даёт возможность в этом случае сформировать для неё уравнение в частных производных четвёртого порядка:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi + \lambda (\varphi_{xxxx} (2\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + 2\varphi_{xy}^2 - 2\varphi_{xx}\varphi_{yy}) + \\ + \varphi_{yyyy} (\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{yy}^2 + 2\varphi_{xy}^2 - 2\varphi_{xx}\varphi_{yy}) + \\ + 2\varphi_{xxyy} (\varphi_{xx}\varphi_{yy} + 8\varphi_{xy}^2) + \\ + 2(2\varphi_{xx} - \varphi_{yy}) (2\varphi_{xy}\varphi_{xxx} + \varphi_{xxx}^2) + \\ + 2(2\varphi_{yy} - \varphi_{xx}) (2\varphi_{xy}\varphi_{yyy} + \varphi_{yyy}^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varphi_{xxy}^2 (3\varphi_{xx} - \varphi_{yy}) + 2\varphi_{xyy}^2 (3\varphi_{yy} - \varphi_{xx}) + \\
& + 2\varphi_{yy}\varphi_{xx}\varphi_{xyy} + 2\varphi_{xx}\varphi_{xxy}\varphi_{yyy} + \\
& + 2\varphi_{xy}(\varphi_{xxy}\varphi_{xyy} - \varphi_{xx}\varphi_{yyy}) + \\
& + 12\varphi_{xy}(\varphi_{xx}\varphi_{xxy} + 2\varphi_{xxy}\varphi_{xyy} + \varphi_{xyy}\varphi_{yyy}) = 0, \\
& \lambda = g_2 K / ((3K + G) G^2)
\end{aligned}$$

где параметр λ оценивается по значениям постоянных упругости как малый.

Тогда решение уравнения для функции Эри можно искать её разложением по этому параметру в форме

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \lambda\varphi^{(1)} + \lambda^2\varphi^{(2)} + \dots \quad (5.4)$$

Первое из уравнений для системы бигармонических функций в составе (5.4) соответствует уравнению линейной теории упругости

$$\Delta\Delta\varphi^{(0)} = 0. \quad (5.5)$$

Второе уравнение имеет вид

$$\Delta\Delta\varphi^{(1)} + A_0 = 0, \quad (5.6)$$

где A_0 – получается дифференцированием функции $\varphi^{(0)}$, полученной решением (5.5). Способы дифференцирования и комбинации производных определяются исходным дифференциальным уравнением.

Третье уравнение получается из равенства нулю коэффициентов при λ^2

$$\Delta\Delta\varphi^{(2)} + A_{01} = 0, \quad (5.7)$$

где A_{01} – получается дифференцированием функций $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, полученных решением (5.5)-(5.6).

Процесс уточнения решения продолжается до тех пор, пока значения произведения $\lambda^k \varphi^{(k)}(x, y)$ не станут незначимыми в диапазоне изменения аргументов x, y .

В качестве функции Эри начального приближения (5.5) примем функцию

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{6}cx(y^3 - 3b^2y), c = -\frac{3F}{2b^3h}. \quad (5.8)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям:

- вдоль верхнего и нижнего края полосы
- на свободном конце полосы

$$y = \pm b: \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0;$$

$$x = 0: \quad \sigma_x = 0, \int_{-b}^b \tau_{xy} dy = 0.$$

Уравнение первого приближения (5.6) запишется в виде

$$\Delta\Delta\varphi^{(1)} + 2c^3(2x^3y + 8xy^3 - 5b^2xy) = 0. \quad (5.9)$$

Решение бигармонического уравнения (5.9) составим из частного решения неоднородного уравнения и общего решения одной части, удовлетворяющего сформулированным граничным условиям:

$$\varphi^{(1)} = -\frac{c^3}{60} \left(2x^3y^5 + \frac{4}{7}xy^7 - 4b^2x^3y^3 - \frac{13}{5}b^2xy^5 + 2b^4x^3y + \frac{122}{35}b^4xy^3 - \frac{51}{35}b^6xy \right).$$

Процедуру получения приближений функции Эри можно продолжить.

Решение задачи, основанное на двух полученных приближениях описывается соотношениями:

- в начальном приближении (линейный закон упругости)

$$\sigma_x^{(0)} = \varphi_{yy}^{(0)} = cxy; \quad \sigma_y^{(0)} = \varphi_{xx}^{(0)} = 0;$$

$$\tau_{xy}^{(0)} = -\frac{c}{2}(y^2 - b^2),$$

- в первом приближении

$$\sigma_x^{(1)} = -\frac{c^3}{15} xy \left(10x^2y^2 - 6b^2x^2 + 6y^4 - 13b^2y^2 + \frac{183}{35} b^4 \right);$$

$$\sigma_y^{(1)} = -\frac{c^3}{5} xy (b^2 - y^2)^2;$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = \frac{c^3}{60} \left(30x^2y^4 - 36b^2x^2y^2 + 64b^4x^2 + \right.$$

$$\left. + 4y^6 - 13b^2y^4 + \frac{366}{15} b^4y^2 - \frac{51}{35} b^6 \right).$$

Для оценки величины малого параметра можно воспользоваться следующими данным:

$$F = 3,33 \text{ Н}; \quad b = 5 \text{ см}; \quad l = 50 \text{ см}; \quad h = 1 \text{ см};$$

$$K = 1,33 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad G = 0,47 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad g_2 = 7,26 \cdot 10^6.$$

Вычисленное значение параметра даёт значение

$$\lambda = 0,98 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{МПа}^2}.$$

Согласно этим данным искомое напряжение представляется следующей комбинацией значений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \lambda \sigma_x^{(1)} = 10,0 - 0,98 \cdot 10^{-3} \cdot 266 = \\ &= (10 - 0,26) \text{ МПа} \end{aligned}$$

Основная литература

1. Агошков, В.И. Методы решения задач математической физики / В.И. Агошков, Дубовский В.П., Шутяев В.П. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
2. Петров, В.В. Методы расчёта конструкций из нелинейно-деформируемого материала :учеб. пособие / В. В. Петров, И. В. Кривошеин .– М. : АСВ, 2009 .– 206 с.
3. Бабкин, А.В. Прикладная механика сплошных сред: учебник для втузов. Т.3. Численные методы в задачах физики быстропротекающих процессов:учебник для втузов / А.В. Бабкин [и др.]. – М.: Изд-во МГТУ, 2006. – 520 с.

Дополнительная литература

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы: учеб. пособие для вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : Бином, 2007. – 636 с.
2. Глаголев, В.В. Математическое моделирование в системе MATLAB: учеб. пособие / В.В. Глаголев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. – 88 с.
3. Самарский, А.А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский. – СПб : Лань, 2005. – 288 с.
4. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики: учеб. пособие для вузов / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – М.; СПб., 2005. – 425 с.
5. Поршневу, С.В. MATLAB 7: основы работы и программирования: учеб. пособие для вузов / С.В. Поршневу .– М.: Бином, 2006. – 320с.