

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства  
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры  
«Строительство, строительные материалы и  
конструкции»  
« 18 » января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

  
\_\_\_\_\_ А.А. Трещёв

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к самостоятельной работе студентов  
по дисциплине  
«Механика поврежденных сред»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы магистратуры**

по направлению подготовки  
08.04.01 «Строительство»

с направленностью (профилем)  
**Теория и проектирование зданий и сооружений**

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-04-22

Тула 2022 год

## Разработчик методических указаний

Теличко В.Г., доцент, к.т.н.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
(подпись)

## ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях рассматриваются вопросы самостоятельного освоения дисциплины «Механика поврежденных сред». Существенное внимание уделяется изучению основ механики поврежденных сред, в том числе ознакомлению с методами решения прикладных задач, а также решением классических задач пластичности и ползучести, связанных с возможной деформацией строительных материалов и конструкций. Самостоятельная работа для студентов, обучающихся по программе «Теория и проектирование зданий и сооружений» является основой учебной программы магистерской подготовки.

В указаниях рассмотрена методика самостоятельной работы студента по всему курсу.

### Очная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
3 семестр	
1	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
2	Выполнение курсовой работы
3	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

### Заочная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
3 семестр	
1	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
2	Выполнение курсовой работы
3	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

## 1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа способствует углублению, закреплению и обобщению теоретического материала, выявлению способностей студента к практическому решению прикладных инженерно-технических задач теории пластичности и ползучести.

Целью самостоятельной работы является изучение студентом основ механики поврежденных сред, в том числе знакомство с определяющими со-

отношениями между напряжениями и деформациями для моделей повреждаемых сред, изучение методов решения прикладных задач механики поврежденных сред, ознакомление с экспериментальными подходами к изучению процессов деформационной повреждаемости строительных материалов и конструкций, ознакомление с решением прикладных задач. Студент должен получить обоснованное представление об использовании научных положений механики поврежденных сред в области строительства.

## 2. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

### 2.1. Общие требования

Студенты по выданной рабочей программе с учетом рекомендуемой учебной и научной литературы должны самостоятельно изучить, отводимый для этих целей материал и подготовить реферат по индивидуальному заданию, выданному преподавателем. Реферат должен быть сдан на проверку до 15 недели семестра.

Реферат представляется в виде пояснительной записки (10 – 20 стр.), с необходимыми эскизами. Пояснительная записка должна содержать описание научной проблемы, современное состояние научных знаний в данном направлении, описание известных экспериментальных данных, анализ достоинства и недостатков известных методик решений решения прикладных задач механики поврежденных сред, границ их применимости, должны быть предложены возможные перспективные их приложения.

### 2.2. Темы для самостоятельной проработки

№ п/п	Наименование видов самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)	Методические материалы
<i>Очная форма обучения</i>			
<i>3-й семестр</i>			
1	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины: 1. Зависимости между напряжениями и деформациями для моделей повреждаемых тел	6	См. 9.1, [1- 5] См. 9.2, [1]
2	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины: 2. Механика повреждаемости упругих тел	6	См. 9.1, [1-5]
3	Самостоятельное изучение разделов содержания	8	См. 9.1, [1, 2]

№ п/п	Наименование видов самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)	Методические материалы
	дисциплины:3. Механика повреждаемости упруго-пластических тел		
4	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:4. Механика повреждаемости вязко-упругопластических тел	8	См. 9.1, [1-5]
5	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:5. Теория ползучести поврежденных сред	8	См. 9.1, [1-5]
6	Подготовка к практическим занятиям	28	См. 9.6.1
7	Выполнение КР	20	См. 9.7.1
8	Подготовка доклада на конференцию	6	См. 9.3, [1-4]
<b>Итого</b>		90	
<b>Заочная форма обучения</b>			
<i>3-й семестр</i>			
1	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:2. Механика повреждаемости упругих тел	10	См. 9.1, [1-5]
2	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:3. Механика повреждаемости упруго-пластических тел	10	См. 9.1, [1, 2]
3	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:4. Механика повреждаемости вязко-упругопластических тел	10	См. 9.1, [1-5]
4	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:5. Теория ползучести поврежденных сред	10	См. 9.1, [1-5]
5	Подготовка к практическим занятиям	30	См. 9.6.1
6	Выполнение КР	20	См. 9.7.1
7	Подготовка доклада на конференцию	10	См. 9.3, [1-4]
<b>Итого</b>		100	

### 2.3. Методика самостоятельной работы

Предлагается два взаимодополняющих направления. Первое направление заключается в самостоятельном изучении студентом предложенных тем по литературе и в зале INTERNET. Второе направление заключается в обращении студента за консультацией к преподавателю за разъяснением сложных мест изучаемого материала и выясняет возможные направления развития теории на индивидуальных консультациях.

Завершается самостоятельная работа студента защитой реферата.

### 2.4. Защита реферата

Полностью законченный реферат, оформленный в виде пояснительной записки с приложением эскизов, сдается преподавателю на проверку за два – три дня до назначенного срока защиты. После проверки реферата преподавателем студент защищает его перед комиссией из двух преподавателей.

Если при проверке реферата преподавателем обнаружены ошибки и неточности, то реферат возвращается студенту для доработки. После исправления ошибок реферат повторно проверяется и выносится на защиту.

## **2.5. Методические указания к работе над рефератом**

### **2.5.1. План построения и содержание разделов реферата**

Пояснительная записка состоит из следующих разделов:

- введение;
- основная часть (анализ напряженно-деформированного состояния повреждаемого материала и расчет связанных с ним конструкторско-технологических параметров конструкции или технологического процесса изготовления);

- выводы.

Во введении дается описание конструкции, технологического процесса, физико-механических свойств применяемого строительного материала, а также известные подходы к решению возникающей прикладной задачи механики повреждаемости.

В основном разделе приводятся метод решения поставленной задачи, выбираемая модель деформируемого материала, граничные и начальные условия, решение моделирующей системы основных и определяющих уравнений, включая кинетическое или эволюционное соотношение повреждаемости. Решение должно быть наглядно проиллюстрировано; должны быть сделаны аналитические выводы, направленные на их прикладное использование.

В выводах отражается перспективность и возможность дальнейшего развития решения поставленной прикладной задачи в области строительных материалов и технологий.

## **2.6. Оформление реферата**

Реферат открывается титульным листом. На нем приводятся сведения о министерстве, наименование университета и кафедры, тема контрольно-курсовой работы, подписи студента и руководителя проекта, город и год.

На второй странице приводится содержание реферата.

Реферат должна содержать: введение, основную часть, заключение, список использованных источников и приложения. Текстовая часть представляется в виде компьютерной распечатки с использованием любого текстового редактора на нелинованной бумаге формата А4,. Все страницы кроме титульного, нумеруются арабскими цифрами.

Изложение материала должно быть кратким, без лишних подробностей и повторений. Графики и рисунки нумеруются и подписываются. Формулы приводятся в общем виде с пояснением символов.

Каждая страница должна иметь рамку и штамп, оформленные в соответствии с ГОСТ Р 21.1101-92. Пояснительная записка должна быть сшита.

## 2.7. Оформление графической части реферата

Графическое оформление эскизов реферата должно выполняться с учетом ГОСТ 21.501-93.

## 3. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

### 3.1. Тема 1: Зависимости между напряжениями и деформациями для моделей повреждаемых тел

*Общие методические указания.* Рассматриваются физические аспекты деформационной повреждаемости материалов, модели повреждаемых тел и зависимости между напряжениями и деформациями для повреждаемых материалов.

Определяющие уравнения упругопластической среды. Исходная формулировка состоит из следующих основных положений теории пластического течения.

1. Аддитивность упругих и пластических скоростей деформаций:

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p \quad (1.1)$$

где  $d_{ij} = \frac{1}{2}(\vartheta_{i,j} + \vartheta_{j,i})$  — полная,  $d_{ij}^e$  — упругая,  $d_{ij}^p$  — пластическая скорости деформации.

2. Область упругой деформации ограничена условием, которое представляет

собой конечное соотношение между инвариантами тензоров напряжения  $J_i$ , скоростей деформаций  $D_i$  и внутренних параметров среды  $\chi_k$ :

$$F(J_i, D_i, \chi_k) = 0, \quad (i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

3. Упругая деформация  $\varepsilon_{ij}^e$ , связана с тензором напряжения  $\sigma_{kl}$  законом Гука:

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} \quad (1.3)$$

где  $D_{ijkl}^{-1}$  — тензор упругой податливости, который для изотропного материала равен

$$D_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{2\mu} \left[ \delta_{ki} \delta_{lj} - \left( 1 - \frac{2\mu}{3K} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \right]$$

где  $\mu$  — модуль сдвига,  $K$  — модуль объемного расширения.

При выполнении условия (1.2) в материале появляются пластические деформации, которые описываются ассоциированным законом пластического течения, согласно которому скорость или приращение пластической деформации  $\Delta\varepsilon_{ij}^p$  - направлена по нормали к поверхности (1.2),

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.4)$$

где  $d\lambda$  — безразмерная скалярная величина, определяемая в процессе решения. При выполнении условия активного нагружения  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} > 0$  и  $F = 0$ . При

$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} = 0$  происходит "нейтральное нагружение". Если  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} < 0$ , то нагрузка  $\delta \sigma_{ij}$  не вызывает пластических деформаций и  $de_{ij}^p = 0$ .

4. Внутренние параметры  $\chi_k$ , характеризующие внутреннюю структуру материала, изменяющуюся при деформировании, определяются эволюционными уравнениями:

$$\dot{\chi}_k = \chi_k(J_i, \chi_k). \quad (1.5)$$

В качестве примеров таких параметров могут использоваться параметр упрочнения материала, остаточные напряжения, пористость, поврежденность и другие параметры.

В случае, когда условие пластичности (1.2) и эволюционные уравне-

ния (1.5) не зависят от изменяющихся во времени переменных  $D_k^p$  или  $\dot{\chi}_k$  а только от их приращений, то свойства пластической среды не зависят от изменения масштаба времени. Будем называть такие среды упругопластическими или классическими, а среды, зависящие от изменения масштаба времени, - упруговязкопластическими.

Уравнения (1.1) - (1.5) полностью определяют модель среды и совместно с законами сохранения дают замкнутую систему уравнений.

Некоторые подходы к решению упругопластических уравнений. Математическая формулировка уравнений теории пластического течения отличается тем, что для нее определяющие уравнения формулируются в виде дифференциальных соотношений и условия пластичности, которое является конечным соотношением, ограничивающим инварианты тензора напряжений. Например, условие пластичности Мизеса является ограничением на второй инвариант тензора напряжений.

Это обстоятельство вносит определенные особенности в формулировку замкнутой системы уравнений теории пластичности. Появляются различные возможности в представлении системы определяющих уравнений и, как следствие, различия в методах ее решения.

1. Одна из возможностей состоит в тождественном удовлетворении условия пластичности введением новых переменных и сведении уравнений к системе дифференциальных соотношений.
2. Другая возможность, которая используется в большинстве работ по численному моделированию упругопластических процессов, заключается в формулировке уравнений в виде системы дифференциальных уравнений, которая получается после дифференцирования условия пластичности (1.2) и исключения  $d\lambda$  на основании (1.4) при дополнительном начальном условии в виде исходного условия пластичности (1.2).

Определяющие уравнения после этих преобразований имеют вид

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p = (D_{ijkl}^{-1} + HF_{ij}F_{kl})d\sigma_{kl} = A_{ijkl}^{-1}d\sigma_{kl}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad H = \sigma_{kl}F_{kl} \frac{\partial F}{\partial \chi}$$
(1.6)

Уравнения (1.6) можно представить в обращенной форме:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} \left[ d\varepsilon_{kl} - H \left( \frac{1}{2\mu} + HF_{mn}F_{mn} \right)^{-1} F_{kl}F_{pq} d\varepsilon_{pq} \right] = A_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$
(1.7)

где  $D_{ijkl}$  — матрица упругих модулей,  $A_{ijkl}$  — матрица упругопластических модулей.

Добавляя уравнения (1.7) к уравнениям сохранения энергии, получим замкнутую систему уравнений гиперболического типа в гипоупругой форме. Эта форма уравнений применяется обычно при решении упругопластических задач МКЭ. Нежелательным моментом при таком подходе является дифференцирование условия пластичности (1.2).

Искусственное дифференцирование условий пластичности приводит к возрастанию порядка системы дифференциальных уравнений, а следовательно, к ее усложнению и дополнительным трудностям при интегрировании.

3. Еще одна возможность состоит в сведении задачи к минимизации функционала теории упругости при дополнительном ограничении, налагаемом на решение во всей области в виде неравенства пластичности  $F \leq 0$ .

Эти различия в формулировке исходных уравнений требуют существенно разных методов численного решения задачи, которые существенно различаются.

В первом случае происходит сокращение числа неизвестных и соответственно понижение порядка системы дифференциальных уравнений на единицу. Этот подход можно было бы считать наиболее удачным, если бы эта замена осуществлялась так же просто, как в случае плоской задачи для идеального жесткопластического материала. Но в более общих случаях это усложнение существенно, особенно в трехмерном случае.

При третьем подходе задача может быть сведена к решению вариационного неравенства специальными методами, которые имеют свои особенно-

сти и преимущества.

4. Наконец, существует еще одна возможность решения задачи в исходной, естественной постановке уравнений (1.1) - (1.5), если воспользоваться численным методом, основанном на расщеплении уравнений по физическим процессам, не прибегая к дифференцированию условия пластичности (1.2).

Такой подход, использующий исходную формулировку уравнений, оказывается проще и потому предпочтительнее тех, которые основываются на различного рода преобразованиях условия пластичности.

### 3.2. Тема 2: Механика повреждаемости упругих тел

*Общие методические указания.* Рассматриваются основные гипотезы и их экспериментальная проверка для повреждаемых упругих тел, формулировка основных зависимостей и решение прикладных задач.

Понятие о континуальном разрушении материала и его поврежденности. Описание процессов разрушения основывается на представлениях о разрушении как о потере способности материала к сопротивлению деформации вследствие нарушения внутренних связей. Потеря способности материала к сопротивлению деформации может вызываться как внешними воздействиями нетермомеханической природы (химические реакции, облучение), так и термомеханически при достижении напряженно-деформированным состоянием некоторых пределов, определяемых критериями разрушения.

Эксперименты по деформированию и разрушению стандартных образцов при растяжении и сдвиге (кручении полых цилиндров) демонстрируют на диаграммах деформирования участки разупрочнения, на которых напряжения падают с ростом деформаций. При трактовках таких зависимостей надо учитывать, что напряжение и деформация являются не единственными параметрами состояния, и поэтому такие диаграммы показывают лишь срез многопараметрического процесса.

Поврежденность можно разделить на два основных типа — это поврежденность *хрупких* упругих материалов и поврежденность *вязких* упругопла-

стических материалов за пределом упругости. Характерные картины разрушения для вязких и хрупких материалов приведены на рис. 2.1.

Основные типы экспериментов по исследованию разрушения — это сдвиг (растяжение) при постоянной скорости деформации в квазистатике и соударение пластин (стержней) в динамике.

При сдвиге происходит сильный локальный разогрев и термическое разупрочнение, которое часто сопровождается фазовым превращением в полосу сдвига, т.е. это локальное явление (микротрещины и микропоры сливаются в одну полосу адиабатического сдвига, по которой в дальнейшем происходит разрушение материала).

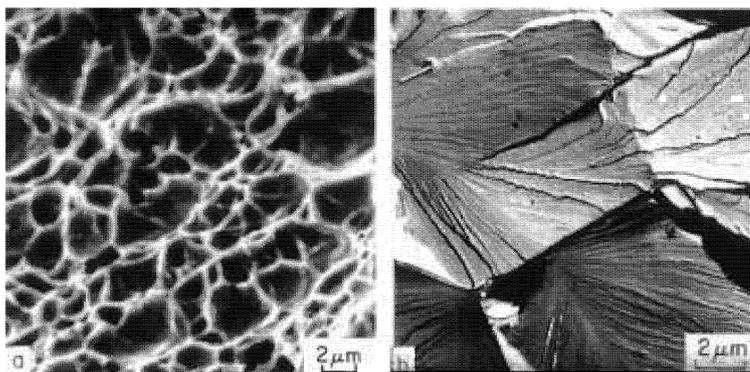


Рис. 2.1. Характер разрушения на микроуровне для вязких (а) и хрупких (б) материалов

Полосы локализации могут наблюдаться не только в пластических, но и в хрупких материалах, что возможно вследствие сильного локального разогрева и разупрочнения. На рис. 2.2 изображено образование пор в образце при растяжении. Другой тип экспериментов — это разрушение отколом при соударении пластин. Это разрушение растяжением при взаимодействии волн растяжения, отраженных от свободной поверхности. Опыты Курана Д.Р., Симана Л., Шоки Д.А.; Каннеля Г.И., Разоренова СВ., Уткина А.В. Фортова В.Е. и др. многократно подтвердили этот факт. Для пластических материалов здесь наблюдается вязкий откол с образованием сферических пор вследствие всестороннего растяжения. Для разрушения требуется достаточная скорость соударения и продолжительность растягивающего импульса, чтобы

механизм зарождения, роста и слияния микропор привел бы к образованию трещины. На рис. 2.3 изображено образование макротрещины вследствие слияния микропор.

Построение моделей поврежденности. Применение инкрементальных теорий пластичности типа Прандтля-Рейсса при описании разупрочнения (падение предела текучести с ростом деформации) приводит к некорректным краевым задачам из-за нарушения постулата Драккера или его математического аналога — критерия Адамара. В квазистатике это связано с утратой уравнениями свойств эллиптичности, а в динамике — с нарушениями гиперболичности. Поэтому прямое описание процесса разрушения в рамках стандартных моделей упругопластических материалов оказывается некорректным.

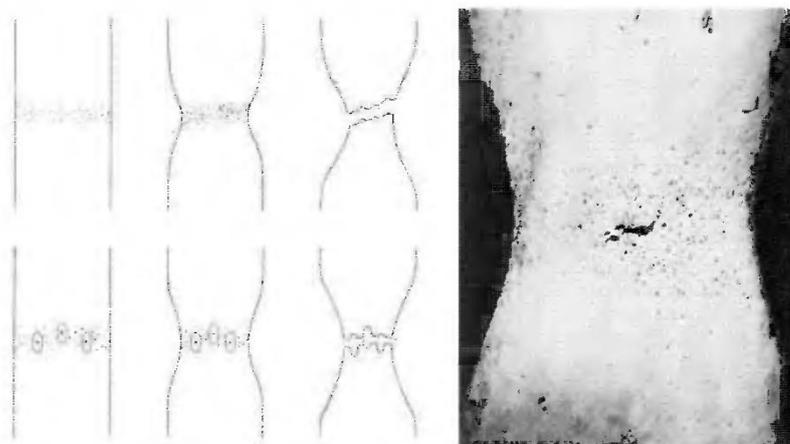


Рис. 2.2. (слева сверху) схема образования полосы локализации при зарождении пор; (слева внизу) локализация при образовании больших пор; (справа) образование пор в образце при растяжении, характерный размер пор 0.001-0.1 мм

С другой стороны, падение напряжений из-за потери материалом способности к сопротивлению деформации может происходить по нетермомеханическим причинам при неизменной деформации. Это говорит о том, что при континуальном описании процессы деформации и разрушения можно и нужно трактовать как независимые (что не исключает их взаимовлияния), а развитие разрушения целесообразно характеризовать своим параметром состояния — поврежденностью. Этот важный шаг по пути разработки континуальных теорий разрушения был сделан в работах Качанова и Работнова .

Под *поврежденностью* в современной механике деформируемого тела понимают нарушение сплошности структуры материала вследствие внешнего воздействия.

Исторически первые попытки описать континуальное разрушение материала основывались на критериях или теориях прочности, которые рассматривали разрушение не как процесс, развивающийся в течение нагружения, а как напряженно-деформированное состояние материала, при котором оно наступает. Этот подход во многом противоречил и экспериментальным наблюдениям и общим положениям механики сплошных сред. В шестидесятые годы прошлого века в работах советской школы механиков оформился

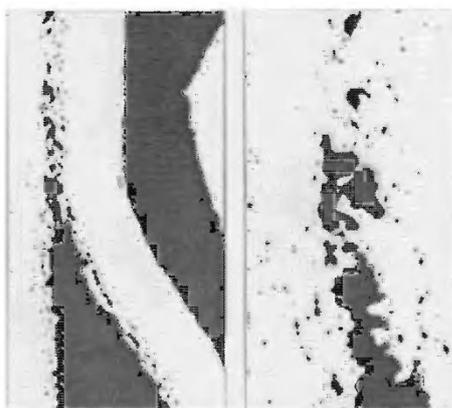


Рис.2.3. Образование макротрещины (слева) при слиянии микропор (справа) в экспериментах по соударению пластин

новый подход, в котором разрушение стало рассматриваться как процесс, связанный с нагружением. Такая точка зрения очень быстро завоевала признание, и в течение короткого времени сложилось новое направление в механике сплошных сред — механика повреждающихся сред или механика континуального разрушения.

Континуальный подход к описанию процессов разрушения предполагает построение теоретических моделей сплошной среды, описывающих разрушение как процесс на основе единых уравнений для деформирования разрушенного и неразрушенного состояний материала. Этот подход описывает появление и развитие поверхностей и зон разрушения без явного их выделения.

В первых работах по теории поврежденности на основе представления о разрушении как о процессе развития в материале микродефектов в виде микротрещин и микропор поврежденность ассоциировалась с образованием пустот (пористостью), что приводит к уменьшению площади, по которой действует напряжение и, следовательно, к уменьшению упругих эффективных модулей материала, изменение которых легко поддается измерению в эксперименте. Влияние микродефектов на несущую способность стержня при растяжении проявляется в уменьшении эффективного модуля Юнга:  $\sigma = E\varepsilon$ , где  $E = E(1-D)$  - эффективный модуль, уменьшающийся с ростом поврежденности  $D$ .

Поясним на простом примере одномерного динамического растяжения стержня, в чем смысл введения параметра поврежденности. Рассмотрим упрощенную систему уравнений нелинейной упругопластической модели Прандтля-Рейсса:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon_\rho), \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon^\rho}{\partial t} &= H(\hat{O}^\rho) \lambda^\rho \sigma, \quad \hat{O}^\rho(\varepsilon, \varepsilon^\rho) = 0.\end{aligned}$$

Для приращений напряжений и деформаций на шаге по времени получаются следующие соотношения:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad E_t = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon},$$

где  $E_t$  зависит от полных и пластических деформаций и от режима нагружения (активное или разгрузка).

Получается следующая система уравнений:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Корректность этой гиперболической системы уравнений в динамике

или эллиптической — в статике (если инерцией пренебречь), определяется условием Адамара:

$$E_t = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} > 0$$

или его физическим эквивалентом, известным как условие Драккера:

$$d\sigma \cdot d\varepsilon > 0.$$

Разрушение (участок 2-3 на диаграмме  $\sigma - \varepsilon$ , показанной на рис. 11.4а) сопровождается разупрочнением  $E_t < 0$  и приводит в рамках классической теории к потере корректности задачи.

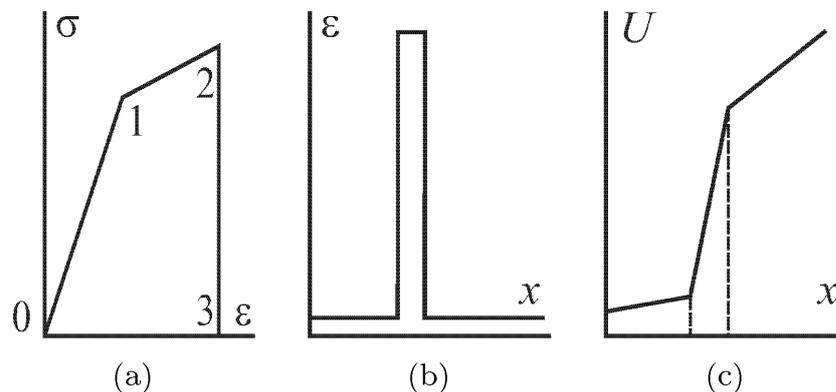


Рис. 2.4. Типичная диаграмма деформирования материала: 0-1 — упругое деформирование, 1-2 — пластическое деформирование, 2-3 — разупрочнение (разрушение) (а). Поведение точного решения для растягиваемого стержня с ослабленной центральной частью: показаны качественные графики изменения деформации (б) и смещения или скорости (с)

С другой стороны, можно смоделировать явление разрушения с помощью следующей упругой модельной задачи для неоднородного растягиваемого стержня, имеющего в средней части участок ослабленного сопротивления («зону разрушения»)  $E_I \ll E$ . Точное решение показывает, что в «зоне разрушения» имеется всплеск деформаций (рис. 2.4б), а скорость и перемещения меняются скачкообразно (рис. 2.4с).

Возникает вопрос: можно ли построить физически и математически корректную модель упругопластического материала, описывающую появление

зон пониженного сопротивления материала, подобных «зоне разрушения» из рассмотренной модельной задачи? Теории повреждаемости (поврежденности) дают утвердительный ответ. Действительно, для повреждающейся упруго-пластической среды система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x}, & \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon - \varepsilon_p, f), \\ \varepsilon &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} &= H(\Phi_p) \lambda_p \boldsymbol{\sigma}, & \Phi_p(\varepsilon, \varepsilon_p) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= H(\Phi_f) \lambda_f(\varepsilon, \varepsilon_p, f) \geq 0, & \Phi_f(\varepsilon, \varepsilon_p, f) &= 0, \end{aligned}$$

где  $f$  — внутренняя переменная, характеризующая поврежденность материала в процессе нагружения.

Откуда получаем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E_t \frac{\partial(\varepsilon - \varepsilon_p)}{\partial t} + E_f \frac{\partial f}{\partial t}, \quad E_t = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \quad E_f = \frac{\partial \sigma}{\partial f}.$$

В теории поврежденности ответственность за разупрочнение не возлагается более на пластическую деформацию или на условие активного нагружения, а относится к уравнению поврежденности. Разупрочнение или, в более общем смысле, разрушение рассматривается как потеря материалом способности к сопротивлению деформации, выражающаяся в уменьшении значений модулей сопротивления из-за разрыва связей или, что то же самое из-за появления микротрещин. Разрушение описывается как *независимый от деформации процесс* (именно независимый, это важно), поэтому характеристика разрушения, называемая параметром поврежденности, связана не с деформацией, а со структурой материала, её способностью к сопротивлению нагружению и с другими параметрами состояния лишь постольку, поскольку они все вместе участвуют в общей системе уравнений и начально-краевых условиях термомеханики. Спад напряжений независимо от изменения деформации обеспечивается вторым слагаемым в приведенном выше выражении для скоростей напряжений. Коэффициент  $E_f < 0$ , что отражает тот факт, что при модуле

$E_t(f) > 0$  напряжения убывают с ростом поврежденности. Положительность модулей упругости обеспечивает выполнение необходимых условий корректности начально-краевых задач по Адамару и Драккеру.

В данном комментарии формулировка теорий и рассуждения намеренно огрублены, например, температура не участвовала в рассуждениях, параметры упрочнения не рассматривались, скоростное упрочнение не фигурировало. Это сделано для более отчетливого описания основной идеи теорий поврежденности. В дальнейшем эти упрощения не используются.

Следует подчеркнуть еще один существенный момент: до появления теории поврежденности в теориях прочности критерий разрушения, как правило, не был связан с законами деформирования материала и предлагался независимо. В большинстве моделей поврежденности деформация и континуальное разрушение описываются как единый процесс, то есть тело разрушается в результате своего деформирования.

Поврежденность моделируется зарождением и ростом определенных микродефектов: дислокаций, микротрещин, микропор и т.д. вплоть до образования макротрещин. Такой подход подразумевает на определенном этапе усреднение или гомогенизацию свойств материала в микрообъеме (размеры микродефектов составляют  $10^{-15} - 10^{-10}$  см) и определение его эффективных свойств, рассматриваемых уже в рамках сплошной среды (характерный мезомасштаб носителей поврежденности —  $10^{-4} - 10^{-2}$  см).

Это *физический подход* к построению моделей повреждающихся материалов, когда в основу модели закладывается определенный микромеханизм образования и развития неупругой деформации и континуального разрушения материала.

Альтернативным ему является термодинамический подход к построению континуального разрушения или поврежденности материала. Здесь поврежденный материал изначально предполагается сплошным, обладающим определенной внутренней структурой, которая характеризуется некоторым набором внутренних переменных (в частности поврежденностью, пластиче-

ской необратимой деформацией и т.п.), связанных с напряженно-деформируемым состоянием материала. Для определения внутренних переменных постулируются кинетические уравнения, согласованные с основными принципами термодинамики и теории определяющих соотношений. Система определяющих уравнений совместно с законами сохранения образует замкнутую систему уравнений термомеханики, которая описывает поведение материала вплоть до разрушения. Этот подход описан в работах Кондаурова В.И. и Фортова В.Е., Можена.

В *промежуточных подходах* вводятся объекты различной природы, из которых состоит материал промежуточного мезомасштаба (зерна, поликристаллы, макротрещины, молекулярные цепи, многофазные смеси и т.д.). Постулируется определенный механизм образования обратимых и необратимых деформаций материала. Разделы механики, развивающие такие подходы построения определяющих уравнений, объединяются под названиями «мезомеханика», «молекулярная механика», «механика трещин» и т.д.

Поврежденность может быть изначальной, может возникать только вследствие нагружения (зарождение пор) и иметь пороговое условие аналогичное условию пластичности.

Физически механизмом нелинейной деформации является зарождение и развитие в материале дефектов кристаллической решетки под действием термомеханической нагрузки. Механизмы развития дефектов, как и их природа, многообразны и исследуются в физике твердого тела. В настоящее время хорошо изучены на микроуровне природа дислокаций и их связь с пластической деформацией.

В работах Гарсона и Твергаарда предложено условие пластичности для среды с периодическим расположением сферических пор, полученное из теоретического решения. На его основе Гарсоном, Твергардом и Нидельманом (Gurson, Tvergaard, Nedelman) была предложена модель (GTN-модель) поврежденности эффективного упругопластического материала, независящего от скорости деформации, со скалярной мерой поврежденности — пористо-

стью. Модель учитывает зарождение и рост пор в процессе пластической деформации, описывает пластическую сжимаемость материала и эффект дилатансии. В качестве критерия разрушения принимается критическая величина пористости. GTN-модель получила достаточно широкое распространение и использовалась при решении конкретных задач. Она хорошо описывает влияние первого инварианта на пластические свойства и сжимаемость разупрочняющегося пластического материала.

Определяющие уравнения GTN-модели. Гарсоном, Твергардом и Нидельманом была предложена связная модель повреждаемости упругопластического материала, которая известна в литературе как GTN-модель. В упругой области материал подчиняется закону Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}.$$

Скорости упругих и пластических деформаций аддитивны:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}.$$

Условие пластичности пористого материала получено Гарсоном, исходя из решения задачи о сферически-симметричном деформировании сферической поры в идеальнопластическом материале в виде:

$$\Phi = \left( \frac{S}{\sigma_Y} \right)^2 + 2q_1 f \operatorname{ch} \left( -\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_Y} \right) - \left( 1 - (q_1 f)^2 \right) = 0,$$

где  $\mathbf{s} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$  — девиатор тензора напряжений Коши;

$S = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}$  — интенсивность касательных напряжений;  $p = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$

гидростатическое давление;  $\sigma_Y(\bar{\varepsilon}_m^{pl})$  — предел текучести сплошного материала (материала матрицы), зависящий от интенсивности пластических деформаций;  $f$  — пористость (объемная доля пор в материале).

Твергард ввел в это условие константы  $q_1, q_2$  (как коэффициенты корректировки пористости и давления) для того, чтобы модель Гарсона давала согласие с численным расчетом модельной задачи о растяжении материала, с

периодической пористой структурой, в случае плоской деформации. Твердгард получил  $q_1 = 1.5$ ,  $q_2 = 1.0$ . Варьируя эти параметры, можно приблизить результаты численного расчета к экспериментальным данным.

На рис. 2.5 приведена зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  для материала с начальной пористостью  $f_0$  при одноосном растяжении и сжатии. При сжатии материал упрочняется, так как пористость уменьшается, а при растяжении разупрочняется из-за зарождения и роста пор.

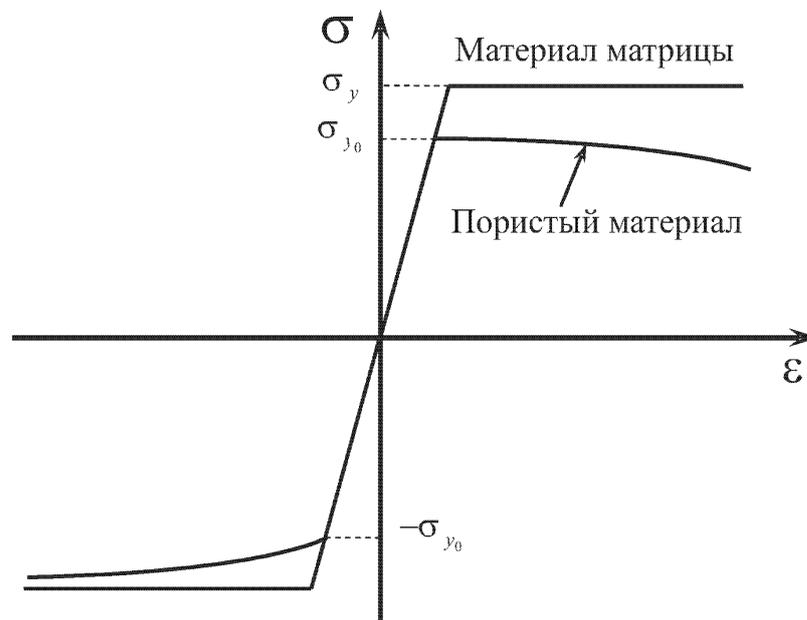


Рис. 11.5.

Рассматриваемая модель описывает поведения металлов с не слишком большой долей пор. Хотя материал матрицы, содержащий поры, предполагается пластически несжимаемым, поведение эффективного материала зависит от давления из-за наличия пор.

В качестве пластического потенциала принимается условие пластичности. Пластическая деформация представляется в виде (ассоциированный закон)

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3}{2S} \frac{\partial \Phi}{\partial S} \mathbf{s} \right),$$

где  $\dot{\lambda}$  — неотрицательный скалярный множитель.

Эволюция интенсивности пластической деформации и пористости.

Упрочнение-разупрочнение материала матрицы описывается зависимостью  $\sigma_Y(\bar{\varepsilon}_m^{pl})$ . Исходя из того, что работа пластических деформаций выполняется только материалом матрицы, получим уравнение, описывающее эволюцию  $\bar{\varepsilon}_m^{pl}$ :

$$(1 - f) \sigma_Y \dot{\bar{\varepsilon}}_m^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}, \quad \bar{\varepsilon}_m^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{pl} : \boldsymbol{\varepsilon}_m^{pl}},$$

где  $\varepsilon_m^{pk}$  — пластическая деформация материала матрицы.

Изменение пористости материала происходит вследствие роста существующих пор и зарождения новых:

$$\dot{f} = \dot{f}_{gr} + \dot{f}_{nucl}$$

Из уравнения неразрывности, считая материал матрицы пластически несжимаемым, получим уравнение для роста пор:

$$\dot{f}_{gr} = (1 - f) \dot{\bar{\varepsilon}}_m^{pl} : \mathbf{I}.$$

Зарождение пор происходит вследствие относительного движения зерен и зависит от интенсивности пластических деформаций, в [76] было предложено соотношение

$$\dot{f}_{nucl} = A \dot{\bar{\varepsilon}}_m^{pl}, \quad A(\dot{\bar{\varepsilon}}_m^{pl}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}_m^{pl} - \varepsilon_N}{s_N}\right).$$

Интенсивность деформаций, при которой зарождаются поры, подчиняется нормальному распределению со средней величиной  $\varepsilon_N$ , с дисперсией  $s_N$ . Объемная доля зарождающихся пор равна  $f_N$ . Поры зарождаются только при растяжении (объемная пластическая деформация  $\varepsilon_{ii}^p > 0$ ).

### 3.3. Тема 3: Механика повреждаемости упругопластических тел

*Общие методические указания.* Рассматриваются основные гипотезы и их экспериментальная проверка для повреждаемых упругопластических тел, формулировка основных зависимостей и решение прикладных задач.

Основные гипотезы и их экспериментальная проверка. Основные зависимости. Прикладные задачи. Рассмотрим уравнения микромодеи упруго-вязкопластической среды, в процессе деформирования которой зарождаются и растут микродефекты, приводящие к интенсификации пластического течения в локализованных областях типа полос скольжения и постепенному разрушению материала.

Начальный этап пластического течения описывается на микроуровне движением дислокаций. Скорость вязкопластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  пропорциональна потоку движущихся дислокаций:

$$\dot{\gamma}^p = abN_m V \quad (3.1)$$

где  $a$  — вектор Бюргерса,  $b$  — коэффициент ориентации. Средняя скорость дислокаций  $V$  определяется термофлуктуационным движением и действующим активным напряжением  $s_{ij}^a = s_{ij} - s_{ij}^r$ :

$$V = V_0 \exp \frac{U_0 - (s - s^r)}{-k\theta}, s \geq s^r, \quad (3.2)$$

где  $U_0$  — энергия активации,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\theta$  — абсолютная температура,  $s^r$  — остаточное напряжение.

Число подвижных дислокаций  $N_m$  растет пропорционально степени пластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  и падает с увеличением общего числа дислокаций  $N$  вследствие их запираания на межзеренных границах:

$$N_m = (N_0 + \alpha \dot{\gamma}^p)^n \exp(-N / N^*), \quad (3.3)$$

где  $N_0, N^*, \alpha$  — постоянные материала.

Чтобы описать процесс зарождения микродефектов и их развития, необходимо рассмотреть баланс потоков дислокаций в материале. В соответствии с формулами (3.1) - (3.3) полный поток дислокаций  $\dot{\rho}_{ij}$  на первой стадии пластической деформации распадается на два:

поток подвижных дислокаций  $\dot{\gamma}_{ij}^p$ , идущий на образование собственно пластической деформации, и на поток дислокаций  $\dot{\omega}_{ij}$ , который скапливается около изолированных препятствий и на границах зерен.

Обозначая через  $\eta$  часть потока  $\dot{p}_{ij}$ , которая связана с подвижными дислокациями, а через  $1 - \eta$  — поток, скапливающийся на границах зерен, можно записать:

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = \eta \dot{p}_{ij}, \quad 0 < \eta < 1, \quad (3.4)$$

$$(1 - \eta) \dot{p}_{ij} = \dot{\omega}_{ij}^p,$$

откуда получим  $\dot{\omega}_{ij} = (1 - \eta) \dot{\gamma}_{ij}^p / \eta$ .

Стадия появления пор и поврежденности. При достаточном скоплении дислокаций на межзеренных границах происходит частичная аннигиляция накопившихся дислокаций и движение зерен друг относительно друга, возникают дисклинации, образуются микропоры и микротрещины. Эта вторая стадия деформации характеризуется постепенным разрушением материала, которое приводит к дополнительной деформации. Пластическая деформация осредотачивается в областях наибольшего макроразрушения и приводит к развитию полос скольжения.

На второй стадии баланс потоков запишется так:

$$(1 - \eta) \dot{p}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} + \dot{b}_{ij}, \quad (3.5)$$

где  $b_{ij}$  — тензор потока аннигилирующих дислокаций.

Образование пор также часто связывают с образованием таких дефектов, как вакансии в узлах кристаллической решетки, и с их перемещением к границам кристалла, где происходит их коагуляция и образование пор. Заметим, что на первой стадии пластической деформации шаровая часть тензора пластической деформации  $p_{ii} = 0$ , поэтому  $\omega_{ii} = 0$ , на второй стадии появляется объемная пластическая сжимаемость  $p_{ii} \neq 0$  и  $b_{ii} \neq 0$ .

Естественно предположить, что поток аннигилирующих дислокаций  $\dot{b}_{ij}$  пропорционален накопившимся на препятствиях дислокациям  $\omega_{ij}$ .

Процесс стока начинается только после того, как интенсивность тензора накопившихся на препятствиях дислокации  $\Omega = \left(\frac{3}{2}\omega_{ij}\omega_{ij}\right)^{1/2}$  достигает кри-

тического значения  $\Omega_0$ . При этом интенсивность стока  $\dot{B}_{II}$  будет монотонной функцией избыточной интенсивности

( $\Omega_{II} - \Omega_0$ ):

$$\dot{B}_{II} = \left(\frac{3}{2} \dot{b}_{ij} \dot{b}_{ij}\right)^{1/2} = \hat{Q} \frac{\Omega_{II} - \Omega_0}{\tau_p}, \quad (3.6)$$

$$\hat{Q}(z) = \begin{cases} Q(z), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

где  $Q(z)$  безразмерная функция своего аргумента, а  $\tau_p$ - параметр размерности [с], связанный с масштабом пор. Уравнение (3.6) позволяет определить параметр  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\hat{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0)}{\tau_p \Omega_{II}}. \quad (3.7)$$

Окончательное уравнение для определения потока  $\omega_{ij}$  на основании (3.4) - (3.7) можно записать в виде:

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} + \frac{\hat{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0)}{\tau_p \Omega_{II}} \omega_{ij} = \frac{1-\eta}{\eta} \frac{d\gamma_{ij}^p}{dt}. \quad (3.8)$$

Макрофизический смысл тензора  $\omega_{ij}$  соответствует тензору микронапряжений и следует из хорошо известного экспериментального факта, что величина микронапряжения пропорциональна плотности скопления дислокаций на границах зерен.

Критическая плотность дислокации  $\Omega_0$ , при которой появляются микротрещины на межзеренных границах или других препятствиях и соответствующая ей критическая интенсивность остаточных напряжений  $S_0^r$ , может быть определена на микроуровне на основе дислокационных моделей разрушения.

Условие  $\Omega_{II} = \Omega_0$  в пространстве компонент тензора напряжений имеет смысл поверхности начала разрушения.

Характеристики тензора аннигиляции  $b_{ij}$  коррелируют с тензором повреждаемости среды  $D_{ij}$ . Девиаторная часть тензора  $b'_{ij}$  связана с девиатором повреждаемости  $D'_{ij}$ , которая приводит к релаксации остаточных напряжений

(второе слагаемое в уравнении (3.8)).

Шаровая часть  $\dot{b}_{ii}$  коррелирует с объемной деформацией повреждаемости  $\dot{b}_{ii}$  —►  $\dot{D}_{ii}$  и связана со скоростью роста пористости  $\dot{f}$ , которая определяется уравнением неразрывности.

Макромодель. Переходя от микропараметров к макропараметрам, запишем уравнения (3.1) - (3.3) для трехмерного напряженно-деформированного состояния в обобщенной форме в виде соотношения между вторыми инвариантами тензора скорости пластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  и тензора активных напряжений  $S^a$ :

$$\dot{\gamma}^p = f(\gamma^p) \frac{\psi(S^a - S_0^a)}{\tau_d} \quad (3.9)$$

где  $\tau_d$  — время релаксации активных напряжений, связанное с масштабом дислокаций.

Принимая гипотезы теории течения, получим из уравнений (3.1) - (3.3) на первой стадии деформирования при  $\Omega_{II} < \Omega_0$  упруговязкопластические уравнения для общего трехмерного деформируемого состояния:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2\beta} \dot{s}_{ij} + f(\gamma^p) \frac{\psi(S^a - S_0^a)}{\tau_d T} S_{ij}^a, \quad (3.10)$$

Считая материал для простоты пластически несжимаемым:  $\varepsilon_{kk}^p = 0$ , для шаровых частей тензора  $\sigma_{ii}$  получим упругий закон.

Принимая, что для девиаторов остаточных напряжений и накопившегося потока дислокаций выполняется соотношение:

$$s_{ij}^r = 2\mu^* \omega_{ij}^l, \quad (3.11)$$

получим, что условию  $\Omega_{II} < \Omega_0$  для остаточных напряжений  $s_{ij}^r$  отвечает макроусловие  $S^r \leq S_0^r$ , здесь  $\mu^*$  — константа размерности [Н/м<sup>2</sup>]. Эволюционное уравнение (3.4) для  $S_{ij}^r$  на первой стадии пластического деформирования примет вид:

$$\frac{1}{2\mu^*} \dot{s}_{ij}^r = \frac{1-\eta}{\eta} \dot{\gamma}_{ij}^p \quad (3.12)$$

Интегрируя (3.12) по  $t$  при постоянном  $\mu^*$ , получим известный закон кинематического упрочнения:

$$s_{ij}^r = 2\alpha\gamma_{ij}^p, \quad \alpha = \mu^* \frac{1-\eta}{\eta}. \quad (3.13)$$

Модуль упрочнения  $\alpha$  определяется из экспериментальных данных по эффекту Баушингера.

Таким образом, для  $S_r < S_0$ , т.е. до начала образования микропор, материал матрицы описывается в соответствии с теорией дислокаций уравнениями (3.10) - (3.13) упруговязкопластической среды с кинематическим упрочнением. При  $S^r \geq S_0^r$ , для тензора  $s_{ij}^r$  получаем релаксационное уравнение:

$$\dot{s}_{ij}^r + \frac{2\mu^*}{\tau_p} \frac{Q(S^r - S_0^r(f))}{S^r} s_{ij}^r = 2\alpha d\dot{\gamma}_{ij}^p, \quad (3.14)$$

Уравнения (3.12) - (3.14) можно записать в виде единого уравнения, если ввести функцию  $Q(z)$  в соответствии с формулой (3.6).

Это уравнение описывает релаксацию остаточных напряжений в материале после того как начался процесс образования микропор, а следовательно, разупрочнение материала. До этого в материале происходило упрочнение в соответствии с уравнением (3.13).

Уравнение (3.14) показывает, что релаксация происходит до некоторого стационарного значения  $S_0^r(f)$ , отличного от нуля. В дальнейшем при  $t \gg \tau_p$  остаточные напряжения будут изменяться по закону пластического течения, ассоциированного с поверхностью текучести с пределом текучести, зависящим от пористости  $S^r = S_0^r(f)$ , которое следует из (3.14) при  $\tau_p \rightarrow 0$ :

$$ds_{ij}^r + H(s_{mn}^r d\varepsilon_{mn}^p) \frac{s_{mn}^r d\varepsilon_{mn}^p}{(S_0^r(f))^2} s_{ij}^r = 2\alpha\gamma_{ij}^p, \quad (3.15)$$

где  $H(z)$  — функция Хевисайда.

С появлением пор ситуация существенно меняется. Теперь материал состоит из матрицы и пустот, т.е. является двухфазным материалом. Зная свойства

матрицы, которые описываются уравнениями (3.10), (3.13), можно найти эффективные характеристики пластического материала. С появлением пор изменяется условие пластичности материала, кроме того, нужны уравнения, описывающие зарождение и эволюцию дефектов. Трудность решения этой задачи существенно зависит от формы пор. Теоретическое решение проблемы возможно на основе решения задачи о единичной поре в среде под действием сил, приложенных на бесконечности, и последующем суммировании этого решения для некоторого известного распределения пор по размерам и ориентации. Ясно, что решение в аналитической форме, если и возможно, то только для простых линейных сред. Для нелинейных сред решение можно получить только численно и постараться аппроксимировать его простым аналитическим выражением, выделив наиболее существенные факторы, либо сделать это, основываясь на экспериментальных данных.

Полагая, что поры имеют сферическую форму, примем, что для идеально упругопластического пористого материала справедливо условие пластичности Гарсона. Обобщим его на пористый материал, матрица которого описывается упруговязкопластическими уравнениями с кинематическим упрочнением:

$$\Phi(\sigma_{ij}^{\alpha}, f, \sigma_Y) = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{\alpha} s_{ij}^{\alpha}}{(\sigma_Y)^2} + 2q_1 f c h \frac{3q_2}{2} \frac{\sigma_{kk}^{\alpha}}{\sigma_Y} - (1 + (q_1 f)^2) = 0, (3.16)$$

где  $s_{ij}^{\alpha}$  — девиатор тензора активных напряжений, а  $\sigma_Y$  есть предел текучести матрицы упруговязкопластического материала, который определяется из условия равенства пластичной работы для матрицы и эффективного материала:

$$\sigma_{ij}^{\alpha} \varepsilon_{ij}^p = (1 - f) \dot{\gamma}_p \left[ \sigma_Y (\gamma^p) + \psi^{-1}(\tau \dot{\gamma}_p) \right], (12.17)$$

Из первого уравнения определяется  $\gamma^p$ , после чего из второго находим  $\sigma_Y$ . Напряжение  $\sigma_{ij}^{\alpha}$  и скорости диссипативных деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  в эффективном материале связаны ассоциированным законом пластического

течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}, \quad (3.18)$$

если ассоциативный закон имеет место для материала матрицы.

Параметр  $\dot{\lambda}$  определяется из второго уравнения: (3.17):

$$\dot{\lambda} = \frac{\sigma_Y}{\tau_p} \Psi(\sigma_Y - \sigma_Y(\gamma_p)) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}^\alpha} \sigma_{ij}^\alpha \right)^{-1}.$$

Из уравнения неразрывности следует уравнение роста пор:

$$\dot{f}_{ar} = (1-f) \dot{\varepsilon}_{kk}^p = \Lambda \frac{3f(1-f)}{\sigma_Y} q_1 q_2 sh \frac{3q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_Y}. \quad (3.19)$$

Уравнения зарождения и эволюции пор остаются такими же, как для GTN-модели и описываются формулами (3.5) - (3-7) и замыкают полную систему определяющих уравнений (3.16) - (3.19). Из них находятся напряжения и внутренние параметры материала при заданном поле скоростей, которое определяется из законов сохранения.

Критерием разрушения материала для предполагаемой модели является условие критического накопления пор. Поскольку кристаллиты находятся в стесненном состоянии и не могут деформироваться свободно, то на межкристаллитных границах образуются межкристаллитные поры. Они накапливаются до некоторого критического значения пористости  $f = f_{cr}$ , при котором происходит их катастрофическое распространение, что ведет к полному межкристаллитному разрушению материала. Это критическое значение пористости  $f_{cr}$  зависит от многих внешних факторов температуры, скорости нагружения и других, а также от структуры материала, и, как показывают эксперименты, изменяется в пределах (0,05-0,50).

Введем в модель эффекты, учитывающие некоторые особенности поведения материала в поврежденном состоянии. Они касаются влияния пористости на упругие модули среды и поверхность поврежденности материала  $S_r = S_0^r(f)$ .

Учитывая, что внутренняя упругая энергия поврежденного материала зави-

сит от пористости и не зависит от пластических деформаций:  $U^{el}(f, \varepsilon_{ij}^{el})$ , получим, что упругие модули  $E$ ,

изменяются в соответствии с формулой, предложенной Л.М. Качановым:

$E = E(1 - f)$ ,  $\bar{\mu} = \mu(1 - f)$ , где  $f$  — пористость, определяемая формулой (3.19).

Считая, что влияние пористости на поверхность поврежденности подобно ее влиянию на поверхность пластического течения для активных напряжений, примем следующее приближенное соотношение:

$$S_0^r(f) = \frac{S_0^a(f)S^r}{S^a}, \quad S_0^a(f) = \sigma_Y(1 + q_1^2 f^2)^{1/2}$$

Учет обоих эффектов приводит к более интенсивному разупрочнению, следовательно, и более резкой локализации. Как показали расчеты по начальной версии модели (без перечисленных добавлений), эти эффекты были недостаточно выраженными вследствие большой мезовязкости материала:  $\tau_p \gg \tau_d$ .

Подчеркнем, что предложенная модель поврежденности в отличие от GTN-модели многомасштабная. Она содержит три временных масштаба:  $t_0$  — характерное время задачи,  $\tau_p$  — время релаксации напряжения в поврежденном материале,  $\tau_d$  — время релаксации в исходном вязкопластическом материале, которые отвечают трем разным пространственным масштабам: макро-, мезо- и микромасштабам, которые отвечают соответственно размерам макрообъекта, размерам поры и дислокации и удовлетворяют неравенствам  $t_0 \gg \tau_p \gg \tau_d$ .

На стадии упрочнения масштабный эффект определяется малым параметром  $\delta_d = \tau_d / t_0$ , а на стадии разупрочнения  $\delta_p = \tau_p / t_0 \gg \delta_d$ . При стремлении  $\delta_d$  и  $\delta_p$  к нулю модель переходит в GTN-модель с кинематическим упрочнением, не зависящую от масштабных факторов.

Приведем геометрическую интерпретацию поверхности пластичности и поврежденности для предложенной модели в пространстве напряжений, которая широко используется при описании теории пластического течения. Модель имеет две критические поверхности, зависящие от интенсивности

скоростей пластической деформации и пористости  $f$ , которые определяют поведение материала. Они показаны на рис. 3.1 штриховыми линиями. Поверхность пластичности активных напряжений  $S^a = \sigma_Y(f)$  определяет переход из упругого состояния в пластическое.

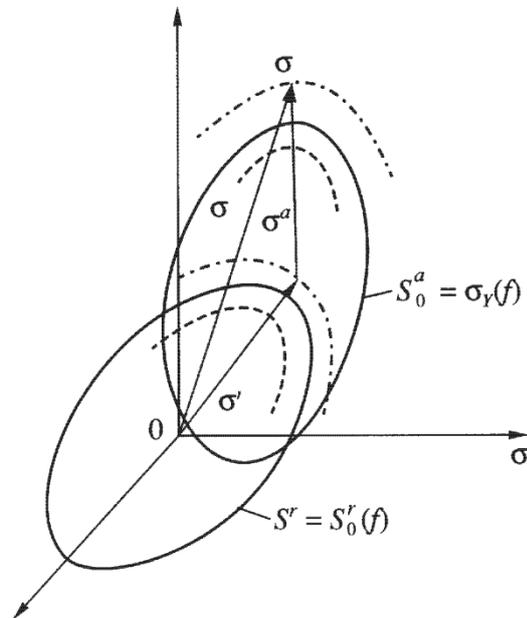


Рис. 12.1.

Сплошными линиями показаны стационарные положения этих поверхностей.

В модель нетрудно включить температурные эффекты, если к деформации  $\varepsilon$  добавить температурную составляющую  $\varepsilon_{ij}^\theta$ , а температуру  $\theta$  в определять из уравнения:

$$\rho c_p = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \sigma_{ij}^a \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (3.20)$$

которое следует из предположения об адиабатичности процесса. Здесь  $c_p$  — теплоемкость при постоянном напряжении,  $\chi = 0.8 \div 0.9$  — тепловой коэффициент конвертируемости,  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $\rho$  — плотность эффективного материала.

В заключение отметим, что численное моделирование процессов разупрочнения и локализации деформаций на основе уравнений (3.16) - (3.20) предложенной микромодели положено в основу решения задачи о разрушении осесимметричного цилиндра при квазистатическом растяжении с постоянной

скоростью, а также в решение задачи о динамическом разрушении стержня при высоких скоростях нагружения.

В литературе имеются и другие мезомодели связанных вязкопластических повреждающихся сред, построенных в более упрощенных предположениях, чем приведенная в настоящей работе, как для описания вязкого континуального разрушения, так и для хрупкого разрушения под действием циклического нагружения.

Растяжение тонкого стержня с постоянной скоростью деформации. Рассмотрим наиболее распространенный вид испытания материалов на одноосное растяжение-сжатие тонкого стержня с постоянной скоростью деформаций. Решение этой задачи позволит оценить, насколько хорошо предложенная модель описывает диаграмму материалов с разупрочнением. Подчеркнем, что вид кривой  $\sigma - \varepsilon$  в модель явно не закладывается, а является следствием принятой модели разрушения материала. На стадии упрочнения принимается простейшая гипотеза о линейном упрочнении материала.

Результаты интегрирования определяющих уравнений представлены в виде кривых  $\sigma - \varepsilon$  при постоянной скорости деформации. На рис. 3.2 приведены четыре характерные кривые для различного типа материалов. Первые три кривые получены при  $S_0 = 1,5$  разных значениях параметра упрочнения  $\alpha$  (табл. 3.1).

Т а б л и ц а

№	1	2	3	4
$S_0$	1.5	1.5	1.5	0.2
$\alpha$	0.01	0.1	0.9	0.1

Как видно из рис. 3.2, кривые при переходе во вторую стадию деформирования при появлении пор имеют излом, после которого следует разупрочнение. Для кривой 1 при малых  $\alpha = 0.01$  характерны большие пластические деформации в стадии упрочнения и резкий спад напряжений при разупрочнении, которое затем выходит на стационарное значение. Кривая 2 получена при  $\bar{\alpha} = 0,1$  и  $\bar{S}_0 = 1.5$ . В этом случае диаграмма имеет «зуб» текучести, после

которого происходит частичноеразупрочнение материала с последующим упрочнением. Такое поведение характерно для мягких сталей, железа и некоторых других материалов, в которых происходят фазовые превращения.

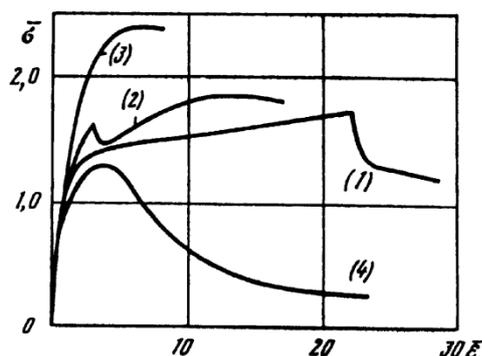


Рис. 12.2.

Кривая 3 соответствует большим значениям параметра кинематического упрочнения  $\bar{\alpha} = 0,9$ , остальные параметры приведены в табл. Видно, что в этом случае участок разупрочнения невелик критическое значение  $f_*$  достигается при сравнительно небольших деформациях. Кривые такого типа характерны для высокопрочных материалов.

Кривой 4 соответствуют значения  $S_0 < 1$  ( $\bar{\alpha} = 0,1, \bar{S} = 0,2$ ). В этом случае диаграмма а — е получается гладкой без излома, характерного для предыдущего случая ( $S_0 > 1$ ), с длительным участком разупрочнения, предшествующим полному разрушению материала при  $f_* = 0,5$ . Подобные диаграммы характерны для таких материалов, как некоторые грунты, глина.

Таким образом, при сравнительно небольшом произволе в четыре параметра, модель позволяет описать, по крайней мере качественно, широкий спектр свойств различных материалов. При феноменологическом количественном описании реальных материалов дополнительно для согласования с экспериментальными данными может быть использован произвол в выборе функций  $Q(z), \Psi(z), S_0(f), \alpha(\epsilon^p), E(f)$ , которые фигурируют в модели и в приведенных расчетах, принимались линейными или постоянными.

Заключение. Предложенная модель является многомасштабной моделью, она качественно отличается от GTN-модели. Как видно из текста, предложенная модель построена на основе дислокационных представлений о пла-

стической деформации при термомеханическом нагружении поликристаллических материалах при умеренных пластических деформациях. При больших деформациях — на представлениях о зарождении и росте мезодефектов типа пор и микротрещин.

На конечной стадии разрушения происходит за счет слияния пор в макротрещину и её распространения вплоть до фрагментации конструкции. Постулирование корреляции между микро- и макропараметрами позволяет осуществить переход от микроуравнений к определяющим макроуравнениям механики сплошных сред и получить кинетические уравнения связной модели упруговязкопластичности с поврежденностью. В результате такого подхода поврежденность описывается тензором, шаровая часть которого — пористость, а девиаторная — связана с релаксацией остаточных напряжений.

Изменение упругих модулей происходит на стадии появления пористости.

Материал матрицы учитывает кинетическое упрочнение и, следовательно, остаточные напряжения, а также описывает эффект Баушингера.

В случае одноосного растяжения или сжатия пластические деформации возникают, когда напряжение достигает величины предела текучести материала (точка А на диаграмме растяжения на рис. 3.1, а). В теории пластичности понятия пределов текучести, пропорциональности и упругости не различаются. Если напряжение меньше предела текучести (точка В на диаграмме растяжения на рис. 3.1.1, а), материал деформирован упруго, а если больше (точка С на рис. 3.1.1, а) — упруго-пластически.

### **3.4. Тема 4: Механика повреждаемости вязкоупругопластических тел**

*Общие методические указания.* Рассматриваются основные гипотезы и их экспериментальная проверка для повреждаемых вязкоупругопластических тел, формулировка основных зависимостей и решение прикладных задач.

Основные гипотезы и их экспериментальная проверка. Основные зависимости. Прикладные задачи. О регуляризации уравнений упругопластических материалов при разупрочнении. Для моделирования процессов по-

врежденности, кроме определяющих уравнений модели, необходимы специальные численные методы их решения. Поврежденность материала связана с разупрочнением, локализацией пластических деформаций и с фазовыми превращениями. Это создает определенные трудности при интегрировании определяющих уравнений и решении начально-краевых задач. Модели повреждающихся сред, неучитывающие многомасштабный эффект в процессе разрушения, требуют регуляризации. Например, как уже отмечалось, первые попытки описать поврежденность в рамках теории течения с падающей диаграммой материала оказались неудачными, т.к. при этом нарушается условие реологической устойчивости Дракера (квазистатическое нагружение), а в динамике условие Адамара:

$$\det(C_{ijkl}n_i n_j) > 0 \quad \forall n_i,$$

где  $C_{ijkl}$  — матрица модулей материала  $d\sigma_{ij} = C_{ijkl}d\varepsilon_{kl}$ .

Введение в модель регуляризирующих операторов возможно как на основе учета дополнительных физических процессов (неучтенных основной моделью), так и на основе математических соображений введением в уравнения искусственных членов с малыми параметрами, регуляризирующими уравнения более низкого порядка. Вводимые операторы высокого порядка могут быть связаны с временным либо с пространственным масштабными факторами.

Например, в теории течения при условии пластичности, не зависящим от изменения масштаба времени, при падающей диаграмме материала:  $\sigma = \sigma_Y(\varepsilon)$ ,  $d\sigma_Y / d\varepsilon < 0$ , задача оказывается некорректной. Регуляризация достигается переходом к упруговязкопластической модели:

$$\tau \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) = \frac{\sigma - \sigma_Y(\varepsilon)}{\sigma_Y(0)}, \quad (4.1)$$

где  $\tau$  — время релаксации,  $E$  — модуль упругости. Оператор в левой части уравнения, отвечающий скорости пластической деформации, повышает порядок определяющего уравнения по времени  $t$ .

Другой способ регуляризации заключается в переходе к градиентным

или нелокальными соотношениями между напряжениями и деформациями (повышение порядка производных по пространству) также регуляризует задачу:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (4.2)$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad b^2 > 0, \quad c < 0.$$

Однако введение в определяющие уравнения операторов высшего порядка с малым параметром  $\delta$  не единственны и не лучший способ регуляризации задачи. Будем называть его математическим. Более простой и естественный физический способ заключается в расширении числа определяющих параметров, например, как это сделано в вышеприведенных моделях введением параметра поврежденности  $f$ .

При повышении порядка уравнений предельная задача при малом параметре  $\delta = 0$  не имеет решения в классическом смысле. Решение жесткой задачи существует в лучшем случае только в асимптотическом смысле. В то время как при физическом способе предельная задача остается корректной и её решение существует в классическом смысле. Численное решение при  $\delta \ll 1$  проще, чем в случае математического способа регуляризации. Математическая регуляризация дифференциальных уравнений не снимает полностью проблему численной корректности решения дискретной задачи и требует специальных методов решения жестких задач, а также различного рода искусственных вычислительных приемов для получения адекватных результатов, подавляющих чувствительность решения к дискретизации задачи.

Решение задач повреждаемости. В настоящее время метод конечных элементов успешно применяется для решения широкого круга нелинейных задач, в частности для решения упругопластических и упруговязкопластических задач. В большинстве работ интегрирование определяющих уравнений выполняется пошаговыми методами по параметру нагружения. При этом приходится численно интегрировать определяющие уравнения и

полную систему уравнений краевой задачи. Выбор схемы интегрирования чрезвычайно важен для решения, особенно при больших деформациях, на порядки превосходящих упругие. В литературе предложено несколько методов интегрирования определяющих уравнений. Использование явных методов приводит к условно устойчивым схемам. При больших деформациях и при решении многомасштабных жестких задач необходимо использовать неявные безусловно устойчивые схемы. Обратный метод Эйлера дает хорошие результаты при условии пластичности Мизеса. Этот метод был обобщен на уравнения с условием пластичности, зависящим от двух первых инвариантов тензора напряжений и внутренних переменных модели и применен к решению задач для упругопластических пористых материалов.

Обратный метод Эйлера. Проведем интегрирование определяющих уравнений упругопластической среды с условием пластичности общего вида, зависящим от двух первых инвариантов тензора напряжений и со структурными переменными. Свойства материала примем не зависящими от изменения масштаба времени, имея в виду интегрирование уравнений GTN-модели.

Уравнения GTN представляют собой систему дифференциальных уравнений, которая не зависит от изменения масштаба времени и может быть записана в приращениях. Интегрирование выполняется по шагам по условному параметру нагружения, который обозначим через  $t$ . Состояние материала в момент времени  $t$  известно, кроме того, при  $t + \Delta t$  задается приращение полной деформации  $\Delta \varepsilon$ .

Требуется определить напряжение и внутренние переменные, удовлетворяющие всем уравнениям системы, включая условие пластичности

при  $t + \Delta t$ .

Для этого запишем закон Гука при  $t + \Delta t$  в следующем виде:

$$\sigma = D^{el} : \varepsilon^{el} \Big|_{t+\Delta t} = D^{el} : \left( \varepsilon^{el} \Big|_t + \Delta \varepsilon^{el} \right) = \sigma^{el} - D^{el} : \Delta \varepsilon^{el}, \quad (4.3)$$

где

$$\sigma^{el} = D^{el} : (\varepsilon^{el}|_t + \Delta\varepsilon)$$

$\sigma^{el}$  можно рассматривать как упругий предиктор, где

$$D^{el} = 2GI \otimes I + \left( K - \frac{2}{3}G \right) I \cdot I \text{ — линейный изотропный тензор упругости.}$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига,  $K$  — модуль объемного сжатия,  $I \otimes I$  и  $I \cdot I$  — соответственно единичные тензоры четвертого и второго порядка. Предполагается разложение полной деформации на сумму упругой и пластической частей. Условие пластичности, закон течения и эволюционное уравнение для внутренних переменных записывается в следующем виде:

$$\Phi(\sigma, H^\alpha) = 0,$$

$$\Delta\varepsilon^{pl} = \frac{1}{3}\Delta\varepsilon_p I + \Delta\varepsilon_q n, \quad (4.4)$$

$$\Delta H^\alpha = \bar{H}^\alpha(\Delta\varepsilon^{pl}, \Delta\sigma, H^\beta), \quad (4.5)$$

где

$$n = \frac{3}{2q} S, \quad \Delta\varepsilon_p = -\Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial p}, \quad \Delta\varepsilon_q = \Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial q}.$$

Здесь  $H^\alpha$  — внутренние переменные. Для GTN-модели  $\alpha = 2$ :  $H^1 = \bar{\varepsilon}_m^{pl}$  — интенсивность деформаций в пластической матрице и  $H^2 = f$  — пористость.

Приращение параметра  $\Delta\lambda$  исключается из двух последних уравнений. В результате получаем:

$$\Delta\varepsilon_p \frac{\partial\Phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0.$$

Уравнение (4.4) подставляем в (4.3):

$$\sigma = \sigma^{el} - K\Delta\varepsilon_p I - 2G\Delta\varepsilon_q n, \quad (4.6)$$

$s^{el}$  и  $n$  коаксиальны, поэтому

$$n = \frac{3}{2q^{el}} s^{el}. \quad (4.7)$$

Т.к.  $n$  известно, то согласованное определение скалярных величин  $\Delta\varepsilon_p$  и  $\Delta\varepsilon_q$  замыкает решение задачи. Таким образом, задача интегрирования упруго-пластических определяющих уравнений, зависящих от давления, сводится к решению двух следующих нелинейных уравнений для скалярных величин

$\Delta\varepsilon_p$  и  $\Delta\varepsilon_q$ :

$$\Phi(p, q, H^\alpha) = 0, \quad (4.8)$$

$$\Delta\varepsilon_p \frac{\partial\Phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0. \quad (4.9)$$

В (4.8) - (4.9)  $p, q, H^\alpha$  определяются по формулам:

$$p = p^{el} + K\Delta\varepsilon_p, \quad (4.10)$$

$$q = q^{el} - 3G\Delta\varepsilon_q, \quad (4.11)$$

$$\Delta H^\alpha = h^\alpha(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q, p, q, H^\beta). \quad (4.19)$$

Уравнения (4.10) - (4.11) получены умножением уравнения (4.8) на I и n соответственно. Уравнение (4.12) — альтернативное выражение уравнения (4.5). Разрешая эту систему уравнений относительно неизвестных  $p, q, \Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q$  и  $H^\alpha$ , замыкаем алгоритм интегрирования для пористого пластического материала. Уравнения (4.8) и (4.9) решаются относительно  $\Delta\varepsilon_p$  и  $\Delta\varepsilon_q$  обратным методом Ньютона. Затем с помощью (4.10) - (4.12) определяются  $p, q$  и  $H^\alpha$  на следующем слое.

Решение краевой задачи. Вычисление якобиана. При использовании неявной схемы для решения нелинейных задач дискретное уравнение равновесия приводит к нелинейной системе уравнений относительно узловых переменных, для решения которой используется метод Ньютона с квадратичной скоростью сходимости. Этот метод требует вычисления линеаризованного модуля:

$$\mathcal{J} = \frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon} = \left( \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} \right)_{t+\Delta t}.$$

Для вычисления якобиана  $\mathcal{J}$  используется (6), переписанное в виде

$$\sigma = 2G(\varepsilon^{el}|_t + \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_q n) + K(\varepsilon_{kk}^{el}|_t + \Delta\varepsilon_{kk} - \Delta\varepsilon_p)I,$$

где  $\varepsilon = \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}I$  - девиаторная часть тензора деформаций  $\varepsilon$ . После дифферен-

цирования получим:

$$\partial\sigma = 2G(\partial\varepsilon - \partial\Delta\varepsilon_q n - \Delta\varepsilon_q \partial n) + K(\partial\varepsilon_{kk} - \partial\Delta\varepsilon_p)I. \quad (4.13)$$

Вариации  $\partial\Delta\varepsilon_q$  и  $\partial\Delta\varepsilon_p$  вычисляются с помощью (8) и (9). После достаточно трудоемких алгебраических вычислений получаем систему линейных уравнений для определения вариаций  $\partial\Delta\varepsilon_q$  и  $\partial\Delta\varepsilon_p$ . Подставляя найденные величины в (4.13), получаем линеаризованный модуль.

В общем случае линеаризованный модуль оказывается несимметричным, но не симметрия, как правило, мала и ей можно пренебречь при решении системы уравнений.

Метод расщепления. Рассмотрим применение метода расщепления для решения краевых задач в слабой формулировке по неявной схеме. Как уже отмечалось выше, расщепление определяющих уравнений при этом никак не изменится. Изменения касаются решения системы уравнений краевой задачи по неявной схеме. При это необходимо вычислять якобиан для полной системы уравнений. Расщеплению подвергается только уравнение:

$$\frac{d\sigma}{dt} = D : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{pl}), \quad (4.14)$$

где  $D$  — тензор упругих модулей материала,  $d\sigma/dt$  — объективная производная от тензора напряжений Коши.

*Предиктор* берется при  $\dot{\varepsilon}^{pl} = 0$ , тогда материал среды упругий:

$$\frac{d\sigma}{dt} = D : \dot{\varepsilon}, \quad (4.15)$$

совместно с уравнениями движения на шаге  $\Delta t$  необходимо решать упругую задачу при начальных условиях, полученных на предыдущем шаге для полной упругопластической задачи.

После этого на этапе *корректор* решаются уравнения релаксации напряжений (4.14) при  $\dot{\varepsilon} = 0$  совместно с уравнениями, описывающими внутреннюю структуру материала (упрочнение, повреждаемость) при начальных условиях, полученных на этапе предиктор.

Используя закон ассоциированного течения, получим уравнение релаксации напряжений:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} D \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}, \quad (4.16)$$

$$\dot{H}_i = \frac{d\lambda}{dt} F_i(\sigma, H_i), \quad (4.17)$$

где  $H_i$  — параметры, описывающие внутреннюю структуру материала.

Задача интегрирования определяющих уравнений для нахождения напряжений и внутренних параметров среды при фиксированной деформации представляет задачу релаксации напряжений, имеющую самостоятельное значение.

В случае классической или равновесной упругопластической среды, свойства которой не зависят от изменения масштаба времени, в уравнениях (4.16) и (4.17) можно исключить время  $t$  и перейти к дифференцированию по переменной  $\lambda$ :

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = -D \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad (4.18)$$

$$\frac{dH_i}{d\lambda} = F_i(\sigma, H_i). \quad (4.19)$$

Решая уравнения (4.18) и (4.19) при начальных условиях  $\sigma(\lambda_0) = \sigma^n$ ,  $H_i(\lambda_0) = H_i^{el}$ , полученных из решения упругой задачи на этапе предиктора, найдем решение как функции  $\lambda$ ,  $\sigma^{el}$  и  $H_i^n$ :

$$\sigma = \sigma(\lambda, \sigma^{el}, H_i^n), \quad H_i = H_i(\lambda, \sigma^{el}, H_i^n) \quad (4.20)$$

Подставляя найденные решения в условие пластичности, получаем уравнение для определения параметра  $\lambda = \lambda_*$ , отвечающего коэффициенту корректировки:

$$\Phi(\lambda, p(\lambda), S(\lambda), H_i(\lambda)) = 0. \quad (4.21)$$

Решая это уравнение, находим  $\lambda = \lambda_*(\sigma^n, H_i^{el})$  и, подставляя  $\lambda_*$  в (20), получаем окончательное решение определяющих уравнений на рассматриваемом шаге нагружения, после чего переходим к решению полной краевой задачи при заданном шаге по параметру нагружения.

*Решение краевой задачи. Вычисление якобиана.* Решение краевых задач на основе принцип возможных перемещений методом конечных элементов сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений. Для решения этой системы уравнений методом Ньюто-

на нужно вычислять якобиан  $\partial\sigma/\partial\varepsilon$  ( $\varepsilon$  — полная деформация). Вычисление якобиана зависит от алгоритма интегрирования определяющих уравнений. Стандартным методом это удается сделать только в численном виде. При интегрировании определяющих соотношений методом расщепления достигается существенное упрощение этой задачи, и она может быть решена в аналитическом виде.

Покажем это на примере упругопластической среды с линейным упрочнением. На этапе предиктора полная деформация  $\varepsilon$  считается упругой и решение для напряжений полной задачи выражается только через  $\varepsilon^{el}$ , поэтому

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon^{el}}. \quad (4.22)$$

Продифференцируем уравнение для напряжения по  $\varepsilon$  с учетом (4.22):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = -\left(\frac{\partial p^{el}}{\partial\varepsilon}\right) \otimes I + \left(\frac{\partial s^{el}}{\partial\varepsilon}\right) x + s^{el} \left(\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}\right), \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial p^{el}}{\partial\varepsilon} = -KI, \quad \frac{\partial s^{el}}{\partial\varepsilon} = 2GI - \frac{2}{3}GI \otimes I, \quad (4.24)$$

где  $K$  единичный тензор второго ранга.

Так как выражение для коэффициента корректировки  $x$  находим в явном виде, то, дифференцируя его по  $\varepsilon$ , получаем окончательный результат:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = 3GxI + \left(K - \frac{2}{3}Gx\right)I \otimes I + \frac{3G}{S^{el}} \frac{\partial x}{\partial S^{el}} s^{el} \otimes s^{el}, \quad (4.25)$$

где учтено  $S^{el} = \sqrt{\frac{3}{2}s^{el} : s^{el}}$ .

Интегрирование определяющих соотношений GTN—модели. Применим численно-аналитический метод к более сложным уравнениям упругопластической среды с пористостью. Для простоты примем, что зарождение пор отсутствует и материал матрицы идеально пластический, тогда уравнение для роста пор будет  $\dot{f} = \dot{f}_{gr}$ .

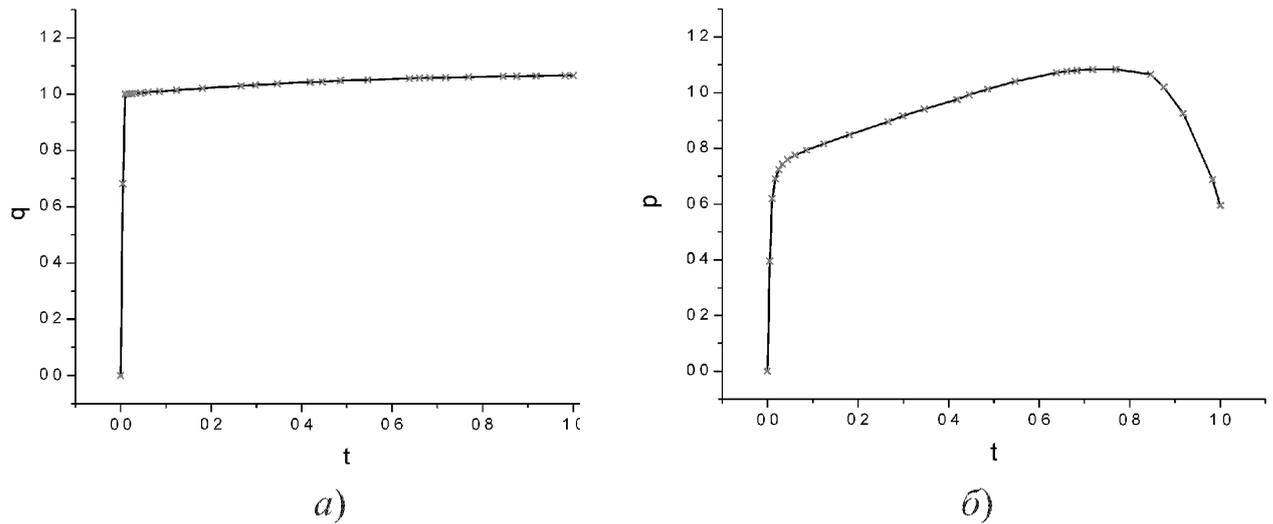


Рис. 4.1

*Преобразование системы определяющих соотношений.* Запишем уравнение для напряжения в следующей форме:

$$d\sigma = D:(d\varepsilon - d\varepsilon^{el}),$$

$$d\sigma = D:d\varepsilon + \frac{d\lambda}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} D:I - \frac{3d\lambda}{2S} \frac{\partial \Phi}{\partial S} D:s, \quad (4.26)$$

где

$$D:s = 2Gs, \quad D:I = 3KI.$$

Уравнение для давления имеет вид

$$dp = -K(d\varepsilon:I) - d\lambda K \frac{\partial \Phi}{\partial p}. \quad (4.27)$$

Уравнение для девиатора напряжений:

$$ds = 2Gd\varepsilon - 6Gsd\lambda. \quad (4.28)$$

Преобразуя уравнение для пористости, получим

$$df = -d\lambda(1-f) \frac{d\Phi}{dp}.$$

### 3.5. Тема 5: Теория ползучести повреждаемых сред

*Общие методические указания.* Рассматриваются основные гипотезы и их экспериментальная проверка для процессов ползучести повреждаемых тел, формулировка основных зависимостей и решение прикладных задач.

Основные результаты экспериментального изучения ползучести поврежденных материалов. Прогнозирование длительной прочности.

Прикладные задачи расчета на ползучесть поврежденного материала.

Для одноосного растяжения были рассмотрены процессы изменения во времени деформаций при постоянном напряжении (последствие или собственно ползучесть) и напряжений при постоянной деформации (релаксации).

В общем случае ползучести изменение деформаций сопровождается изменением напряжений. Для установления зависимостей между деформациями, напряжениями, скоростями их изменения и временем предварительно необходимо максимально ограничить число переменных и высказать предположение о том, между какими из них существует функциональная зависимость. Это предположение и носит название технической теории ползучести. В настоящее время существуют три технические теории ползучести: старения, течения и упрочнения. Эти названия в значительной мере являются условными.

Обычно технические теории ползучести формулируются для простейшего случая одноосного напряженного состояния. Ниже будет рассмотрена формулировка их в общем случае неодносного напряженного состояния. Поскольку деформации ползучести являются в основном необратимыми, для случая неодносного напряженного состояния постулируется применимость основных гипотез теории пластичности. Аналогично ассоциированному закону течения примем существование потенциала скоростей деформации ползучести или потенциала ползучести /, т. е. допустим, что компоненты скоростей деформаций ползучести определяются формулой

$$\xi_{ij}^c = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (0.1)$$

Подставив компоненты скоростей деформаций ползучести по формуле (5.1) в выражение для интенсивности скоростей деформаций получим

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\xi_i^c}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} \quad (0.2)$$

Уравнение

$$f = 0 \quad (0.3)$$

представляет собой уравнение гиперповерхности в пространстве компонентов тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , к которой ортогональны векторы скоростей деформаций ползучести. Эту гиперповерхность будем называть гиперповерхностью ползучести.

Функция  $f$  аналогична соответствующей функции в теории пластичности.

Примем материал изотропным и будем считать, что изменения объема в процессе ползучести не происходит, т. е.

$$\varepsilon_{ii}^c = 0 \quad (0.4)$$

или

$$\xi_{ii}^c = 0 \quad (0.5)$$

Вначале допустим, что упрочнение является изотропным, т. е. поверхность ползучести в процессе деформации изменяется подобным образом (изотропно).

Для случая изотропного упрочнения первоначально изотропного несжимаемого материала функция  $f$  зависит от второго и третьего девиатора напряжений. Так же как и при изложении теорий пластичности в гл. IV, включим в функцию  $f$  только второй инвариант девиатора напряжений, что равносильно в теории пластичности использованию критерия Хубера—Мизеса.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3s_{ij}$$

и поэтому согласно формулам (1.2)

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\xi_i^c}{\sigma_i}$$

Следовательно, зависимости компонентов скоростей деформаций ползучести от компонентов девиатора напряжений принимают вид

$$\xi_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\xi_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) \quad (0.6)$$

Полагая, что при начальном нагружении и в процессе ползучести мгновенные пластические деформации не возникают и добавляя к соотношениям (1.6) скорости упругих деформаций, полученные путем дифференциро-

вания по времени соотношений при  $\mu = 0,5$  (материал несжимаем), имеем

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2G}(\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\sigma}_0) + \frac{3}{2} \frac{\xi_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) \quad (0.7)$$

где точкой обозначена производная по времени.

В теории старения используется гипотеза о существовании потенциала деформаций ползучести, т. е. как и в теории малых упруго-пластических деформаций, принимается, что

$$\varepsilon_{ij}^c = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} \quad (0.8)$$

Полагая, что в случае изотропного упрочнения первоначально изотропного несжимаемого материала в функцию  $f_1$  включен только второй инвариант девиатора напряжений, как при выводе уравнений (5.7), получаем зависимости компонентов деформаций от компонентов напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) \quad (0.9)$$

В теории пластичности в функцию  $f$ , кроме второго инварианта девиатора напряжений, входил еще параметр Удквиста.

В теории ползучести функция  $f$  зависит от некоторой меры скоростей деформаций ползучести, за которую обычно принимают интенсивность скоростей деформаций ползучести. Кроме этого, функция  $f$  может зависеть еще от ряда переменных. Ими могут быть параметр Удквиста, время и другие величины. В теориях течения и упрочнения, кроме интенсивности скоростей деформаций ползучести, в потенциал ползучести обычно включается одна из этих величин: в теории течения время, а в теории упрочнения параметр Удквиста.

В теории старения в потенциал ползучести  $f$  включается интенсивность деформаций ползучести и время. Ю. Н. Работнов указал на возможность включения в потенциал ползучести  $f$  нескольких переменных, которые он назвал структурными параметрами.

Изменение некоторого  $k$ -го структурного параметра описывается следующим кинетическим уравнением:

$$dq_k = a_k d\bar{\varepsilon}_i^c + b_k d\sigma_i + c_k dt + f_k dT \quad (0.10)$$

где  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $f_k$  — некоторые функции от  $\int d\bar{\varepsilon}_i^c$ ,  $\sigma_i$ ,  $t$  и  $T$ , а также  $q_1, \dots, q_k, \dots, q_n$ , если число структурных параметров  $n$ .

В зависимости от того, какие из них включены в потенциал ползучести  $f$  или  $f_1$ , получаем ту или иную теорию ползучести.

При использовании ассоциированного закона течения (5.1) необходимо иметь в виду, что при заданных структурных параметрах это уравнение определяет положение нормали к поверхности ползучести при данном напряженном состоянии. Поэтому при дифференцировании согласно формуле (5.1) структурные параметры остаются неизменными.

## 4. Библиографический список рекомендуемых источников

### 4.1. Основная литература

1. Ботвина Л. Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности / Л. Р. Ботвина; РАН, ин-т металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова; отв. ред. И. И. Новиков. – М.: Наука, 2008. – 334 с.
2. Головин С. А. Физика прочности и пластичности: учебное пособие для вузов / С. А. Головин. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – 192 с.
3. Селиванов В. В. Прикладная механика сплошных сред: учебник в 3-х т. Т. 2. Механика разрушения деформируемого тела / В. В. Селиванов. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 419 с.

### 4.2. Дополнительная литература

1. Зубчанинов В. Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь, 2000. – 703 с.
2. Петкевич В. В. Основы механики сплошных сред: учебное пособие для вузов. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 400 с.
3. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов в 2-х ч. Ч. 1. Деформация и разрушение / Я. Б. Фридман. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1974. – 472 с.
4. Чуканов А. Н. Физика прочности и пластичности. Точечные дефекты в кристаллах: учеб пособие / А. Н. Чуканов. – Тула: изд-во ТулГУ, 2005. – 57 с.
5. Чуканов А. Н. Физика прочности и пластичности. Поверхностные и объемные дефекты в кристаллических материалах: : учеб пособие / А. Н. Чуканов. – Тула: изд-во ТулГУ, 2008. – 111 с.

6. Гучкин И. С. Диагностика повреждений и восстановление эксплуатационных качеств конструкций: учеб. пособие для вузов / И. С. Гучкин. – М.: АСВ, 2001. – 176 с. 7. Тутьшкин Н. Д. Технологическая механика: учебное пособие / Н. Д. Тутьшкин, В. И. Трегубов; под ред. Н. Д. Тутьшкина. – Тула: изд-во ТулГУ, 2000. – 196 с.

### **4.3. Периодические издания**

1. Известия Тульского государственного университета. Сер. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением / ТулГУ; Тула, изд-во ТулГУ. Вып. 1. – 2006. – 408 с.
2. Известия Тульского государственного университета. Сер. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением / ТулГУ; Тула, изд-во ТулГУ. Вып. 2. – 2006. – 345 с.
3. Известия Тульского государственного университета. Сер. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением / ТулГУ; Тула, изд-во ТулГУ. Вып. 3. – 2006. – 250 с.
4. Известия Тульского государственного университета. Сер. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением / ТулГУ; Тула, изд-во ТулГУ. Вып. 4. – 2006. – 204 с.

### **4.4. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы**

#### **8.4.1 Программное обеспечение**

- Пакет программ «Строительные материалы и изделия»
- SCAD Office
- ANSYS

#### **8.4.2 Интернет-ресурсы**

- <http://www.bibliotekar.ru/spravochnik-94-stroymaterialy/> Электронный справочник строительных материалов
- <http://www.stroitel-news.ru/> Строительный блок. Всё самое интересное о строительстве. Новости строительства, статьи, строительная литература.
- <http://djvu-inf.narod.ru/tslib.htm> DjVu БИБЛИОТЕКИ - Строительство и инженерные системы