МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и конструкции»
«_18_» _января_ 2022 г., протокол №_5_

Заведующий кафедрой

_____

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе студентов
по дисциплине
«Основы механики деформируемого твердого тела»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
08.04.01 «Строительство»

с направленностью (профилем)
Теория и проектирование зданий и сооружений

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-04-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Трещев А.А., профессор, д.т.н., профессор
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях затрагиваются вопросы современного развития теории механики деформируемого твердого тела. Самостоятельная работа для студентов, обучающихся по направлению 08.04.01 «Строительство», является основой учебной программы.

В указаниях рассмотрена методика самостоятельной работы студента по всему курсу.

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа способствует углублению, закреплению и обобщению теоретического материала, выявлению способностей студента к практическому решению конкретных инженерно-технических задач.

Очная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
1 семестр	
1	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
2	Выполнение курсовой работы
3	Подготовка доклада
4	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

Заочная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
2 семестр	
1	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
2	Выполнение курсовой работы
3	Подготовка доклада
4	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

Целью самостоятельной работы является ознакомление студента с современным состоянием теории механики деформируемого твердого тела. Студент должен получить общие представления о развитии теории деформирования строительных материалов и конструкций.

Введение

Целью самостоятельной работы по дисциплине является *расширение* представления об основных понятиях механики деформируемого тела и элементах математического аппарата, используемых для построения различных механико-математических моделей.

При самостоятельном изучении материала рекомендуется использовать не только источники информации, материалы из которых приведены в качестве ориентировочной основы, но и книги, указанные в библиографическом списке.

Как и при подготовке к практическим занятиям, основными вопросами являются следующие:

1. Зачем нужна изучаемая механико-математическая модель?

2. Какие гипотезы механики используются для формирования определяющих соотношений модели?

3. Какие математические задачи являются характерными для применения определяющих соотношений?

4. Какие результаты даёт решение математических задач, порождаемых данной моделью.

Контроль качества выполненной самостоятельной работы осуществляется в ходе *тестового контроля* на промежуточной аттестации. В составе тестовых заданий половина заданий (20) используют понятия, определения, формулы и качественные результаты, которые относятся к тематике самостоятельной работы.

Эта часть заданий оценивается в 20 баллов и является существенной для осуществления желания студента получить оценку «отлично» в ходе экзамена по дисциплине.

Тема
1
Деформированное состояние

Тематика самостоятельной работы рабочей программой не предусмотрена.

Тема
2
Напряженное состояние

Тематика самостоятельной работы рабочей программой не предусмотрена.

Тема
3
Термодинамические основы теории упругости

3.1. Основные понятия и законы термодинамики

См. доп.лит. [15, п. 3.1]

Требуется ознакомиться с такими панятиями феноменологической термодинамики как:

- окружающая среда;
- физическая система:
  - изолированная;
  - замкнутая;
  - однородная;
  - параметры состояния:
    - внешние;
    - внутренние;
    - уравнения состояния;
- термодинамическое равновесие:
  - механическое;
  - тепловое:

- при адиабатических стенках;
- при диатермических стенках;
  - принцип транзитивности:
- термодинамический процесс:
  - квазистатический;
  - неустановившийся;
  - обратимый;
  - необратимый;
  - теплопроводность;
- функции состояния:
  - внутренняя энергия;
  - абсолютная температура;
  - энтропия;
- законы термодинамики:
  - «нулевой»;
  - первый;
  - второй;

3.2. Закон сохранения энергии для деформированного тела баланс энтропии, закон теплопроводности Фурье, свободная энергия, термоупругий потенциал Гиббса

См. доп.лит. [15, пп. 3.2-3.6]

Закон сохранение энергии

Ограничения на механико-математическую модель линейной теории упругости.

Закон сохранения механической энергии при адиабатическом процессе:

$$\mathscr{L} = \frac{d}{dt}(\mathscr{K} + \mathscr{U}).$$

Закон сохранения энергии для произвольного термодинамического процесса:

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{U} + \mathscr{K}) = \mathscr{L} + \dot{Q}.$$

Понятие теплового потока через поверхность:

$$\dot{Q} = -\int_A q_i n_i \, dA = -\int_V q_{i,i} \, dV.$$

Локальная форма закона сохранения энергии:

$$\dot{U} = \sigma_{ji}\dot{\varepsilon}_{ji} - q_{i,i}.$$

Баланс энтропии

Связь энтропии с приращением количества тепла (баланс энтропии в локальной форме)

$$T\frac{dS}{dt} = -\operatorname{div}\mathbf{q} = -q_{i,i}.$$

Представление для внутренней энергии с учётом баланса энтропии:

$$\dot{U} = \sigma_{ji}\dot{\varepsilon}_{ij} + T\dot{S}.$$

Закон Фурье

Зависимости, положенные в основу вывода закона теплопроводности Фурье:

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \Theta + \frac{q_i T_{,i}}{T^2} = 0.$$

Понятие термодинамических сил:

$$F_i = -\frac{T_{,i}}{T^2},$$

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{T^2}\operatorname{grad} T = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{T}\right).$$

Связь составляющих теплового потока и термодинамическими силами в случае медленного термодинамического процесса:

$$q_i = L_{ij}F_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Закон Фурье для анизотропного упругого тела:

$$q_i = -\lambda_{ij}T_{,j}. \quad L_{ij}/T^2 = \lambda_{ij}, \quad \frac{\lambda_{ij}}{T^2}T_{,i}T_{,j} > 0.$$

Свободная энергия

Свободная энергия как термодинамическая функция:

$$F = U - ST.$$

Изменение свободной энергии как полный дифференциал:

$$dF = \sigma_{ji}\, d\varepsilon_{ij} - S\, dT.$$

Линейное приближение для свободной энергии:

$$F(\varepsilon_{ij},\ T) = \frac{1}{2} c^T_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta + F_0(\theta).$$

Определяющие соотношения термоупругости:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = c^T_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta,$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\partial F_0(\theta)}{\partial T}.$$

Понятие теплоёмкости при постоянной деформации:

$$c_\varepsilon = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\varepsilon = -T\,\frac{\partial^2 F_0(\theta)}{\partial T^2}.$$

Функционально представление свободной энергии и энтропии при ограничениях на рост начальной температуры:

$$F = \frac{1}{2} c^T_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - \frac{c_\varepsilon}{2T_0}\theta^2,$$

$$S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + c_\varepsilon \frac{\theta}{T_0}.$$

Соотношения для изотермического процесса:

$$F = \frac{1}{2} c^T_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad \sigma_{ij} = c^T_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Термодинамический потенциал Гиббса

Функция состояния – термодинамический потенциал Гиббса:

$$G = F - \sigma_{ji}\varepsilon_{ij}.$$

Следствия того, что dG является полным дифференциалом:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T}.$$

Применение линейного приближения функции $G(\sigma_{ij}, T)$ в окрестности естественного состояния:

$$\varepsilon_{ij} = s^T_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij}\theta,$$
$$S = \alpha_{ij}\sigma_{ij} + \frac{\partial G_0(\theta)}{\partial T}.$$

Связь параметров термомеханического состояния:

$$\beta_{ij} = \alpha_{kl}c^T_{ijkl}, \quad s^T_{ijkl}c^T_{klij} = 1, \quad \alpha_{ij} = \beta_{ij}s^T_{ijkl}.$$

В случае изотермического процесса:

$$\Lambda = -G = \frac{1}{2}s^T_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = s^T_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad S = \alpha_{ij}\sigma_{ij}.$$

3.3. Внутренняя энергия, уравнение потока тепла, основные уравнения термоупругости

См. доп.лит. [15, пп. 3.7-3.9]

Внутренняя энергия

Внутренней энергии как функция состояния:

$$U \equiv U(\varepsilon_{ij}, S).$$

Результаты разложения функции в окрестности естественного состояния:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_S d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_\varepsilon dS = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} - T dS,$$

$$\sigma_{ij} = c^S_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \vartheta_{ij}S = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_S,$$
$$T = \vartheta_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\partial U_0}{\partial S} = -\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_\varepsilon.$$

Смысл коэффициентов c^S_{ijkl} в сравнении с коэффициентами c^T_{ijkl}.

Связь внутренней энергии с работой деформаций в адиабатическом состоянии:

$$U = W^S.$$

Результаты использования линейных приближений различных функций состояния:

$$\sigma_{ij} = c^T_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta, \qquad S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + c_\varepsilon \frac{\theta}{T_0},$$
$$\varepsilon_{ij} = s^T_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij}\theta,$$
$$\sigma_{ij} = c^S_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \vartheta_{ij}S. \qquad S = \alpha_{ij}\sigma_{ij} + c_\sigma \frac{\theta}{T_0}.$$

Уравнение притока тепла

Линеаризованное дифференциальное уравнение притока тепла с источниками тепла мощностью w:

$$\lambda_{ij}\theta_{,ij} - c_\varepsilon\dot{\theta} - T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = -w.$$

Граничные условия:

1. При заданной на поверхности тела температуре θ как функции положения и времени.

2. При заданном на поверхности тела градиенте температуры как функции положения и времени (тепловой поток через поверхность или тепловая изоляция поверхности).

3. При свободном теплообмене на поверхности тела.

Начальные условия как функция распределения температуры в зависимости от положения области на поверхности.

Модификация уравнения в случае установившегося притока тепла.

Основные уравнения термоупругости

Уравнения движения как результат использования определяющих соотношений.

Уравнения движения в перемещениях:

$$\frac{1}{2}c^T_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})_{,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i + \beta_{ij}\theta_{,j}.$$

Уравнение притока тепла как замыкающая подсистема:

$$\lambda_{ij}\theta_{,ij} - c_\varepsilon\dot{\theta} - T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = -w.$$

Граничные и начальные условия для замкнутой системы уравнений термоупругости в перемещениях и температуре.

Замкнутая система уравнений термоупругости, использующая перемещения и энтропию:

$$\frac{1}{2}c^S_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})_{,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i + \vartheta_{ij}S_{,j}.$$

$$\lambda_{ij}S_{,ij} - c_\varepsilon\dot{S} - \lambda_{ij}\beta_{kl}\varepsilon_{kl,ij} = -\frac{wc_\varepsilon}{T_0}.$$

Частные случаи системы уравнений термоупругости:

- для квазистатической задачи;
- для статической задачи;
- для насвязанной задачи.

3.5. Формулы Клайперона и Бетти

См. доп.лит. [12, глава 3, п. 6-7]

Формула Клапейрона

$$2W = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Следствие формулы Клапейрона для линейно-упругого тела

$$\Lambda(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W = W$$

Формула Бетти

$$\sigma'_{ij}\,\varepsilon''_{ij} = \sigma''_{ij}\,\varepsilon'_{ij}.$$

3.6. Случай температурных напряжений

См. доп.лит. [15, п. 3.11]

Уравнения, описывающие деформацию и температуру в теле

$$\frac{1}{2} c^T_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k})_{,j} = \rho \ddot{u}_i + \beta_{ij} \theta_{,j},$$
$$\lambda_{ij} \theta_{,ij} - c_\varepsilon \dot{\theta} = -w + T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Варианты упрощения уравнений:

- в случае несвязанной температурной задачи;
- в случае несвязанной квазистатической задачи;
- в случае несвязанной задачи при установившемся тепловом процессе.

См. доп.лит. [12, глава 3, п. 9]

Температурные напряжения

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - 3k\alpha\vartheta\delta_{ij}.$$

Температурные деформации

$$\varepsilon_{ij} = (1/E)\,[(1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\,(\Sigma)\,\delta_{ij}] + \alpha\vartheta\delta_{ij}.$$

Где почитать ещё

Основная литература

[5] Глава 1, пп. 1.1-1.4; Глава 2, пп. 2.1-2.2

Дополнительная литература

[2] Глава 2, п. 2.4
[3] Глава 1, пп. 1.16-1.17, п. 1.20
[4] Глава V
[5]
[6] Глава II, п. 7
[7] Часть II. Глава 7, пп. 7.1-7.3
[8] Часть II. Глава 8, пп. 8.6, 8.10
[9] Глава 8, п. 90-93; глава 13
[10] Глава 2, п. 2.5
[12] Глава III

4.2. Общее решение уравнений в перемещениях (решение Папковича-Нейбера)

См. доп.лит.
[12, глава 4, п.5]

Уравнения упругого равновесия в перемещениях

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\Theta_{,i} = -\frac{\rho}{G} f_i.$$

При отсутствии массовых сил:

$$\nabla^2\nabla^2 u_i = 0$$

Необходимость граничных условий для определения компонентов вектора перемещений.

Идея представления решения П.Ф. Папковичем:

$$u_i = \varphi_i + \psi_{,i}, \quad \nabla^2\varphi_i = 0; \ \psi = ?$$

Понятие о гармонической функции как решении уравнения Лапласа.

Уравнение для функции ψ

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{2(1-\nu)}\varphi_{i,i}.$$

Свойство бигармоничности скалярной функции ψ.

Представление общего решения уравнения для ψ:

$$\psi = -\frac{1}{4(1-\nu)}(x_k \varphi_k + \varphi_0).$$

Общее решение уравнения в перемещениях в отсутствии массовых сил в упругом изотропном теле:

$$u_i = \varphi_i - \frac{1}{4(1-\nu)}(x_k \varphi_k + \varphi_0)_{,i}.$$

Роль функции φ_0.

Представление компонентов тензора напряжений через гармонические функции φ_k.

4.3. Принцип виртуальных работ, теорема о минимуме потенциальной энергии (уравнение Лагранжа)

См. доп.лит. [12, глава 5, п.5]

Принцип возможных перемещений для состояния равновесия. Понятие о возможных перемещениях.

Вариационные уравнение Лагранжа

$$\delta\left(\iiint\limits_V W\,dV - \iiint\limits_V \rho f_i u_i\,dV - \iint\limits_{S_t} t_i u_i\,dS\right) = 0.$$

Понятие потенциальной энергии в случае консервативных внешних сил:

$$\Pi = \iiint\limits_V W\,dV - \iiint\limits_V \rho f_i u_i\,dV - \iint\limits_{S_t} t_i u_i\,dS,$$

Доказательство минимальности потенциальной энергии в случае равновесия системы ($\delta\Pi = 0$):

$$\Delta\Pi = \iiint\limits_V W(\delta e_{ij})\,dV > 0,$$

Получение уравнение равновесия в перемещениях и соответствующих им граничных условий на основе вариации потенциальной энергии.

4.4. Принцип минимума дополнительной работы (принцип Кастильяно), вариационная теорема Рейснера

Принцип Кастильяно
См. доп.лит. [12, глава 5, пп.6]

Варьирование напряжений в дефофрмированном теле, находящемся в равновесии.

Вариация дополнительной работы деформации:

$$\delta\iiint\limits_V \Lambda(\sigma_{ij})\,dV = \iiint\limits_V \Lambda(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})\,dV - \iiint\limits_V \Lambda(\sigma_{ij})\,dV.$$

Доказательство существенной положительности второй вариации дополнительной работы и её второго порядка малости по сравнению с $\delta\sigma_{ij}$:

$$\delta^2 \Lambda(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}\,\partial\sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij}\,\delta\sigma_{kl} = \frac{1}{2E}[(1+\nu)\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} -$$

$$-\nu\delta_{ij}\,\delta_{kl}]\,\delta\sigma_{ij}\,\delta\sigma_{kl} = \frac{1}{2E}[(1+\nu)\,\delta\sigma_{ij}\,\delta\sigma_{ij} - \nu(\delta\sigma_{ij})^2] = \Lambda(\delta\sigma_{ij}).$$

Принцип минимума дополнительной работы:

$$\delta\left(\iiint_V \Lambda(\sigma_{ij})\,dV - \iint_{S_u} t_i\,u_i^{(s)}\,dS\right) = 0$$

Вариационная теорема Рейснера
См. доп.лит. [12, глава 5, пп.7]

Гипотеза, лежащая в основе принципа Рейстнера:

$$\varepsilon_{ij} = \partial\Lambda(\sigma_{ij})/\partial\sigma_{ij}$$

Функционал Рейснера:

$$J = \iiint_V [(1/2)\,\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \Lambda(\sigma_{ij}) - \rho f_i\,u_i]\,dV -$$

$$-\iint_{S_t} t_i\,u_i\,dS - \iint_{S_u} \sigma_{ij}\,n_j\,(u_i - u_i^{(s)})\,dS.$$

Условия стационарности функционала Рейснера ($\delta J = 0$):

$$\partial\Lambda/\partial\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} = (1/2)\,(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0,$$

$$\sigma_{ij}\,n_j|_{S_t} = t_i,$$

$$u_i|_{S_u} = u_i^{(s)}.$$

4.5. Единственность решения дифференциальных уравнений теории упругости, теорема Клапейрона, теорема Бетти

Теорема Клапейрона
См. доп.лит. [12, глава 5, пп.1]

Гипотезы, на которых базируется доказательство теоремы Клапейрона соотношении работы деформации и внешних сил.

Работа внешних сил

$$A = \iiint\limits_V (\sigma_{ij,j} + \rho f_i)\, u_i\, dV + \iiint\limits_V \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dV.$$

Следствие формулы Грина и уравнений равновесия:

$$A = \iiint\limits_V \varepsilon_{ij} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\, dV.$$

Формулировка теоремы Клапейрона в виде:

$$\iiint\limits_V W\, dV = \frac{1}{2} A.$$

Единственность решения
См. доп.лит. [12, глава 5, пп.2]

Гипотезы, на которых базируется доказательство теоремы Кирхгофа о единственности решения.

Роль теоремы Клапейрона в построении доказательства.

Анализ опорного результата в доказательстве:

$$\iiint\limits_V W\, dV = 0.$$

Связь единственности решения и существования решения всех типов задач теории упругости.

Теорема Бетти
См. доп.лит. [12, глава 5, пп.3]

Понятие о двух состояниях линейно-упругого тела.

Работа массовых и поверхностных сил одного состояния на перемещениях второго состояния

$$A_{12} = \iiint\limits_V \sigma'_{ij}\, \varepsilon''_{ij}\, dV.$$

Роль формулы Бетти в доказательстве теоремы о равенстве работ A_{21} и A_{12}.

Использование теоремы Бетти в форме:

$$\iiint\limits_V \sigma'_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dV = \iiint\limits_V \rho f_i\, u'_i\, dV + \iint\limits_S t_i\, u'_i\, dS.$$

1. Вычисление изменения объёма тела произвольной формы.

2. Вычисление изменения длины призматического бруса с произвольным контуром поперечного сечения.

4.6. Уравнения теории упругости в ортогональных криволинейных системах координат

Полярные цилиндрические координаты
См. доп.лит. [12, глава 6, п.3]

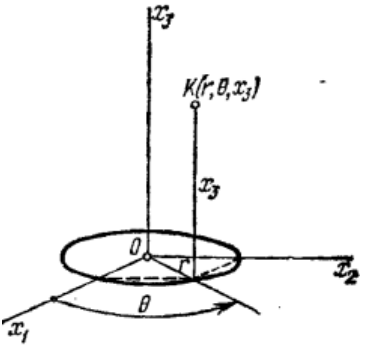


Рис. 4.1. Полярные цилиндрические координаты

Связь между декартовыми и криволинейными координатами:

$$x_1 = r\cos\theta,\quad x_2 = r\sin\theta,\quad x_3 = x^3 = z.$$

1. Соотношения между ковариантными и физическими компонентами вектора перемещения

$$u_1 = u_{(1)} = u_r,\quad u_2 = ru_{(2)} = ru_\theta,\quad u_3 = u_{(3)} = u_z.$$

2. Соотношения между ковариантными и физическими компонентами тензора деформации

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{(1)\,(1)} = \varepsilon_{rr},\quad \varepsilon_{22} = r^2\varepsilon_{(2)\,(2)} = r^2\varepsilon_{\theta\theta},\quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{(3)\,(3)} = \varepsilon_{zz},$$

$$\varepsilon_{12} = r\varepsilon_{(1)\,(2)} = r\varepsilon_{r\theta},\quad \varepsilon_{23} = r\varepsilon_{(2)\,(3)} = r\varepsilon_{\theta z},\quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{(3)\,(1)} = \varepsilon_{zr}.$$

3. Дифференциальные зависимости Коши

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right).$$

4. Объемная деформация

$$\Theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r}.$$

5. Компоненты тензора малого поворота и вектора поворота

$$\omega_{z\theta} = \omega_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right),$$

$$\omega_{rz} = \omega_\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

$$\omega_{\theta r} = \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r}\right).$$

6. Уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r\,\partial \theta} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}\right) = 0.$$

(одно из шести, соответствует использованию ε_{rr} и $\varepsilon_{\theta\theta}$).

7. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \rho f_\theta = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho f_z = 0.$$

8. Уравнения равновесия в перемещениях

$$\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\rho}{G} f_r = 0,$$

$$\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \Theta}{r\partial \theta} + \frac{\rho}{G} r f_\theta = 0,$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\rho}{G} f_z = 0.$$

Здесь использован оператор

$$\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\ )}{\partial r}.$$

9. Уравнения Бельтрами-Митчела

$$\nabla^2 \sigma_{rr} - \frac{4}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_{\theta\theta} + \frac{4}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \theta^2}\right) = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - \frac{4}{r^2}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}\right) = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_{\theta z} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta z}}{r^2} + \frac{1}{1+\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \theta \partial z} = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_{zr} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{zr}}{r^2} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z \partial r} = 0.$$

Сферические координаты
См. доп.лит. [12, глава 6, п.4]

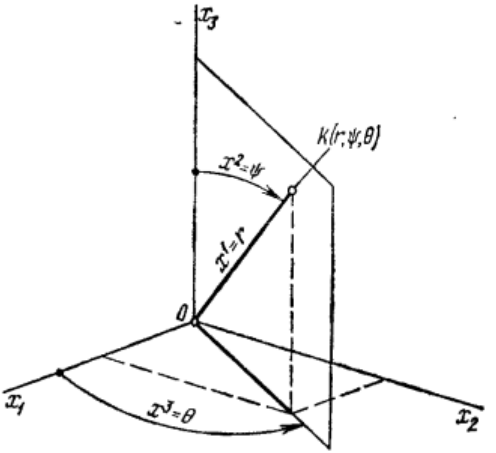


Рис. 4.2. Сферическая система координат

Связь между декартовыми и криволинейными координатами:

$$x_1 = \rho\cos\theta = r\sin\psi\cos\theta,\ x_2 = \rho\sin\theta = r\sin\psi\sin\theta,\ x_3 = r\cos\psi.$$

1. Соотношения между ковариантными и физическими компонентами вектора перемещения

$$u_1 = u_r,\quad u_2 = ru_\psi,\quad u_3 = r\sin\psi u_\theta.$$

2. Соотношения между ковариантными и физическими компонентами тензора деформации

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr},\quad \varepsilon_{22} = r^2\varepsilon_{\psi\psi},\quad \varepsilon_{33} = r^2\sin^2\psi\varepsilon_{\theta\theta},$$
$$\varepsilon_{12} = r\varepsilon_{r\psi},\quad \varepsilon_{23} = r^2\sin\psi\varepsilon_{\psi\theta},\quad \varepsilon_{31} = r\sin\psi\varepsilon_{\theta r}.$$

3. Дифференциальные зависимости Коши

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_{\psi\psi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\psi}{\partial\psi}+\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\psi}{r\,\mathrm{tg}\,\psi},$$

$$\varepsilon_{r\psi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\psi}-\frac{u_\psi}{r}\right),\quad \varepsilon_{\psi\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\psi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial u_\psi}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r\,\mathrm{tg}\,\psi}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta r}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right).$$

4. Объемная деформация

$$\Theta=\frac{\partial u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\psi}{\partial\psi}+\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{2u_r}{r}+\frac{u_\psi}{r\,\mathrm{tg}\,\psi}.$$

5. Компоненты тензора малого поворота и вектора поворота

$$\omega_{\theta\psi}=\omega_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u\theta}{\partial\psi}-\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial u_\psi}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{r\,\mathrm{tg}\,\psi}\right),$$

$$\omega_{r\theta}=\omega_\psi=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right),$$

$$\omega_{\psi r}=\omega_\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\psi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\psi}+\frac{u_\psi}{r}\right).$$

6. Уравнения совместности деформаций (*слишком громоздкий вид*).

7. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\psi}}{\partial\psi}+\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(2\sigma_{rr}-\sigma_{\psi\psi}-\sigma_{\theta\theta}+$$

$$+\sigma_{r\psi}\,\mathrm{ctg}\,\psi)+\rho f_r=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\psi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\psi\psi}}{\partial\psi}+\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial\sigma_{\psi\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}[3\sigma_{r\psi}+(\sigma_{\psi\psi}-\sigma_{\theta\theta})\,\mathrm{ctg}\,\psi]+$$

$$+\rho f_\psi=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\psi\theta}}{\partial\psi}+\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(3\sigma_{r\theta}+2\sigma_{\psi\theta}\,\mathrm{ctg}\,\psi)+\rho f_\theta=0.$$

8. Уравнения равновесия в перемещениях используют оператор Лапласа в виде:

$$\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(\ )}{\partial \psi^2} + \frac{1}{(r\sin\psi)^2}\frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial(\ )}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{ctg}\psi}{r}\frac{\partial(\ )}{\partial \psi}\right),$$

8. Уравнения Бельтрами-Митчела (имеют достаточно громоздкий вид).

Обратите внимание!

Все приведенные соотношения являются реализацией общих формул, которые могут быть выведены с использованием тензорного исчисления в криволинейной системе координат общего вида.

Где почитать ещё

Основная литература

[5] Глава 2-3

Дополнительная литература

[2] Глава 3, п. 3.3
[3] Глава 1, п. 1.15; глава 3
[4]
[5] Глава IX
[6] Глава VIII, п. 4-5
[7]
[8] Часть II. Глава 8, пп. 8.1-8.5, пп.8.7-8.10
[9] Глава 8, пп. 93-94
[10] Глава 4
[12] Глава V, пп. 1-9; глава VI

ТЕМА

5

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

5.1. Плоское напряженное состояние, обобщенное плоское напряженное состояние

См. доп.лит. [12, глава 9, п. 3]

Определение плоского напряжённого состояния:

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0.$$

Зависимость

$$\sigma_{ij} \ (i = 1, 2; \ j = 1, 2)$$

от координаты x_3.

Уравнения закона Гука при плоском напряжённом состоянии

$$\sigma_{11} = \lambda\Theta + 2Gu_{1,1}, \ \sigma_{22} = \lambda\Theta + 2Gu_{2,2}, \ \sigma_{33} = \lambda\Theta + 2Gu_{3,3} = 0;$$

$$\sigma_{12} = G\,(u_{1,2} + u_{2,1}), \ \ \sigma_{23} = G\,(u_{2,3} + u_{3,2}) = 0,$$

$$\sigma_{31} = G\,(u_{3,1} + u_{1,3}) = 0,$$

$$\Theta = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}.$$

Коэффициенты в соотношениях закона Гука, по форме совпадающими со случаем плоской деформации

$$\sigma_{11} = \lambda^*\Theta_1 + 2Gu_{1,1}, \quad \sigma_{22} = \lambda^*\Theta_1 + 2Gu_{2,2}, \quad \sigma_{12} = G\,(u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$\lambda^* = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}\,\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)}.$$

Особенности плоского напряжённого состояния в случае малого размера тела в направлении оси x_3.

См. доп.лит. [12, глава 9, п. 4]

Основания для осреднения напряжений плоского напряжённого состояния (обобщённое плоское напряженное состояние).

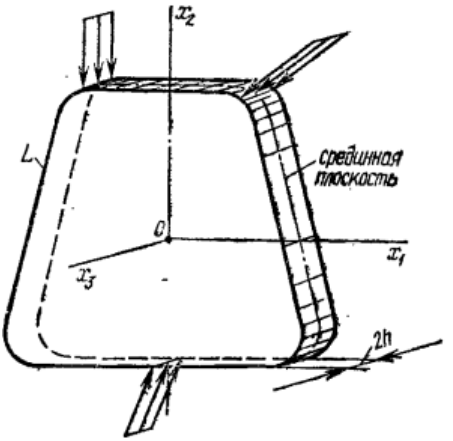


Рис. 5.1. К понятию плоского обобщённого напряжённого состояния

Роль массовых сил в получении результата в виде:

$$\sigma_{33,3}|_{\pm h}=0.$$

Особенности решения задачи о плоском обобщённом напряжённом состоянии в случае граничных условиях в перемещениях (использование уравнений равновесия Ламе).

Математическая идентичность задач о плоской деформации и обобщённом плоском напряжённом состоянии. Плоская задача теории упругости.

5.2. Задача о штампе и силе, действующей на полуплоскость, задача о полом цилиндре (задача Ламе), задача о клине, задача Кирша

Задача Ламе

См. доп.лит. [5, п.4,12]

Понятие об осесимметричном поле напряжений в цилиндрических координатах.

Постановка задачи Ламе.

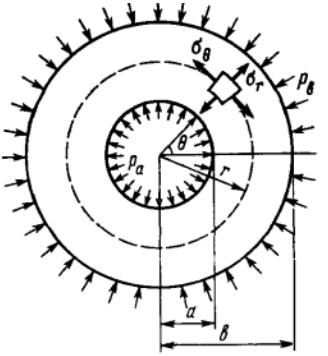


Рис. 5.2. К постановке задачи Ламе

Постановка задачи в перемещениях (причина «обнуления» тангенциального перемещения):

$$u'' + \frac{1}{r}\,u' - \frac{1}{r^2}\,u = 0.$$

Граничные условия:

$$r = a,\ \sigma_r = -p_a;\ r = b,\ \sigma_r = -p_b.$$

Общее решение

$$u = C_1 r + C_2\,\frac{1}{r}.$$

Определение постоянных.

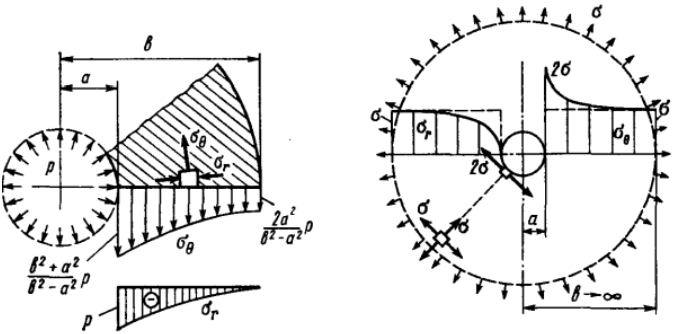


Рис. 5.3. Распределение напряжений в частных случаях

Проблема *неединственности* решения задачи о нагружении бесконечной полой трубы в напряжениях.

Задача о силе, действующей на полуплоскость
См. доп.лит. [5, п. 4.13, стр. 116]

Понятие упругой полуплоскости.

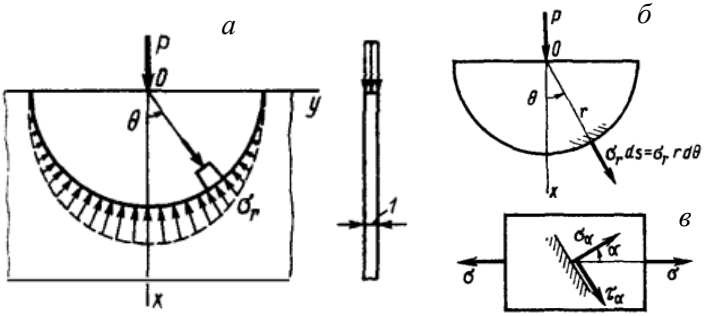


Рис. 5.4. К понятию упругой полуплоскости

Вид плоской задачи. Её отличие от задачи Рис. 5.5.

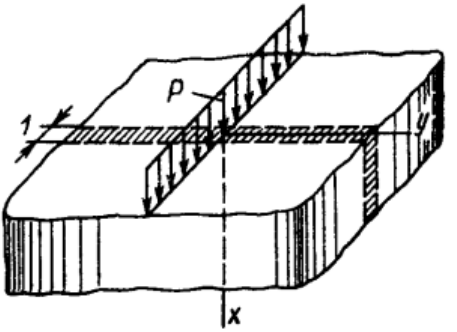


Рис. 5.5. Задача о нагружении полупространства

Обоснование использования уравнения совместности деформаций в виде функции

$$\varphi = Kr\,\Theta\,\sin\,\Theta$$

Обоснования решения в декартовых координатах:

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi r}\cos^3\Theta; \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r}\sin\Theta\cos\Theta;$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi r}\cos\Theta\sin^2\Theta.$$

Графическое представление решения:

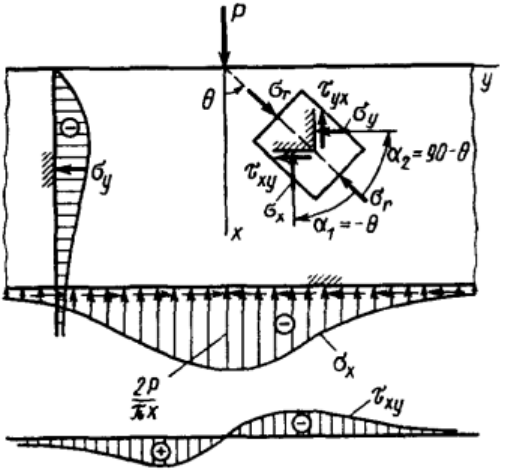


Рис. 5.6. Распределение напряжений в двух плоскостях

Использование формул решения в качестве функций влияния для произвольной нагрузки:

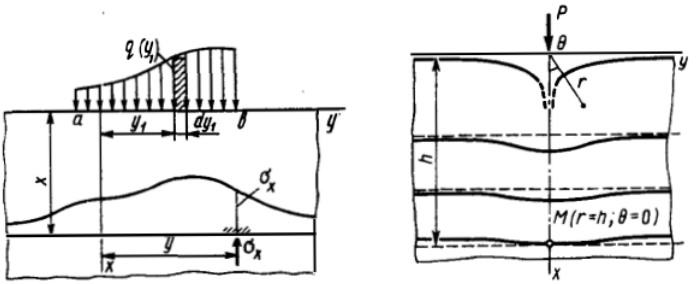


Рис. 5.7. Участок неравномерно распределённой нагрузки

Задача о клине
См. доп.лит. [5, п.4.13, стр. 120]

Задача о клине как обобщение задачи о действии сосредоточенной силы на упругую полуплоскость.

Использование данных Рис. 5.4.*б* для определения постоянной K функции $\varphi = Kr\,\Theta\,\sin\Theta$.

Получение решения для случая, когда сосредоточенная сила параллельна оси x.

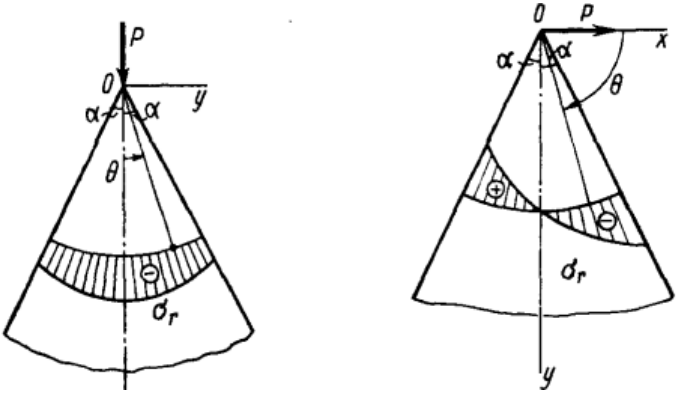


Рис. 5.8. Распределение напряжений в задачах о клине

Задача Кирша
См. доп.лит.
[5, п.4.13, стр.121]

Растяжение пластины с круглым отверстием.
Гипотеза о размере отверстия. Её эффективность.

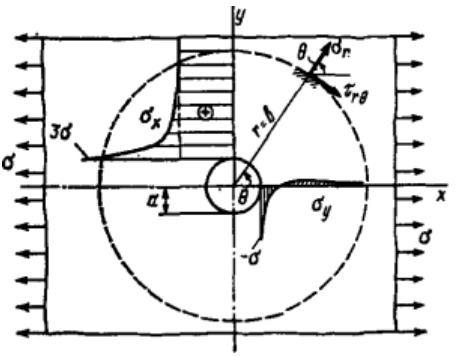


Рис. 5.9. Данные и решение задачи Кирша

Использование формул

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)\,\sigma; \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma \sin 2\alpha.$$

для определения напряжений на границе кольца (пунктир на Рис. 5.9.).

Гипотеза о виде функции напряжений

$$\varphi = f(r)\cos 2\theta.$$

Вывод уравнения для функции напряжений:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{4f}{r^2}\right)=0.$$

Общее решение и определение его постоянных.

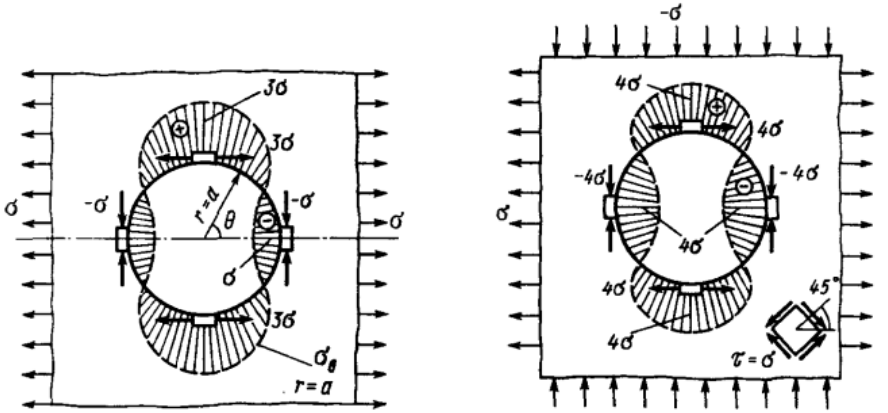


Рис. 5.10. Распределение тангенциальных напряжений в частных случаях

Задача о штампе

См. доп.лит. [15, п. 6.7]

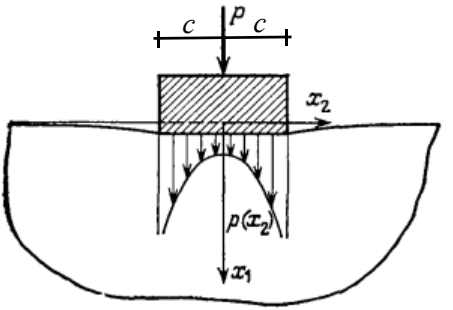


Рис. 5.11. Действие силы на упругое полупространство посредством абсолютно жёсткого штама

Система гипотез, позволяющая сформировать смешанную систему граничных условий:

$$
\begin{aligned}
&u_1(0,\ x_2) = \text{const}, && |x_2| \leqslant c,\\
&\sigma_{11}(0,\ x_2) = 0, && |x_2| > c,\\
&\sigma_{12}(0,\ x_2) = 0, && -\infty < x_2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Использование принципа наложения воздействий для определения напряжений и перемещений.

Способ получения формул напряжений:

$$\sigma_{11} = -\frac{2}{\pi} x_1^3 \int_{-c}^{c} \frac{p(\xi_2)\, d\xi_2}{r^4},$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2x_1}{\pi} \int_{-c}^{c} \frac{p(\xi_2)}{r^4} (x_2 - \xi_2)^2\, d\xi_2,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2x_1^2}{\pi} \int_{-c}^{c} \frac{p(\xi_2)}{r^4} (x_2 - \xi_2)\, d\xi_2,$$

$$r^2 = x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2.$$

Решение Садовского для распределения напряжения

$$p(x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x_2^2}} \int_{-c}^{c} p(\xi_2)\, d\xi_2 = \frac{P}{\pi\sqrt{c^2 - x_2^2}}.$$

Анализ решения.

Где почитать ещё

Основная литература

[5] Глава 4

Дополнительная литература

[2]
[3] Глава 4
[4]
[5] Глава IX, п. 4; глава XI, п. 1
[6]
[7]
[8] Часть II. Глава 10
[9] Глава 13, пп. 159-164

[10] Глава 5
[12] Глава IX, пп. 1-10, п. 20

ТЕМА
6
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

6.1. Общие понятия

См. осн.лит. [5, п. 10.1]

Нелинейно-упругие и упругопластические материалы:

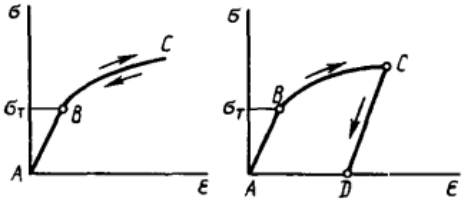


Рис. 6.1. Диаграммы испытаний материалов

Влияние предистории напряжённо-деформированного состояния

Решение задачи упругопластического деформирования в случае одноосного напряжённого состояния.

Понятие условия пластичности и гипотезы, используемые при его формировании.

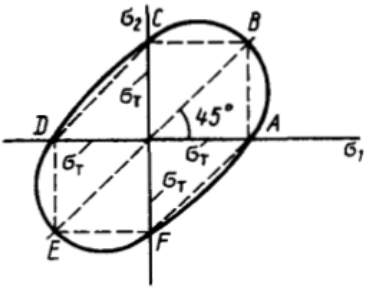
Зависимость условия появления пластических деформаций от выбора координатной системы и общая форма условия пластичности.

Возможность использования различных систем инвариантов тензора напряжений в качестве аргументов функции, описывающей условие пластичности.

6.2. Основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций для плоского напряженного состояния

См. осн.лит. [5, п. 10.12]

Плоское напряжённое состояние. Условие пластичности Мизеса для плоского напряжённого состояния в главных напряжениях:



$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2 .$$

Условие пластичности Сен-Венана и варианты его представления для различных сочетаний знаков главных напряжений:

$$2\tau_{max} = | \sigma_1 - \sigma_2 |.$$

$$2\tau_{max} = | \sigma_1 |$$

$$2\tau_{max} = | \sigma_2 |.$$

Максимальное расхождение между условиями Мизеса и Сен-Венана.

Плоское деформированное состояние. Гипотеза о несжимаемости материала. Общая формула условия текусти Мизеса и Сен-Венана:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 2k$$

Значения коэффициента k для каждого из условий $(\sigma_T/\sqrt{3};\ (\sigma_T/2))$.

Условия замкнутости системы уравнений упругопластической плоской задачи .

Где почитать ещё

Основная литература

[5] Глава 10

Дополнительная литература

[2] Глава 3, пп. 3.3-3.4
[3]
[4]
[5] Глава X
[6]
[7] Глава 7, п. 7.6
[8] Часть II. Главы 15-18
[9] Глава 13, пп. 159-164
[10] Главы 7, 9
[11] Глава IV

Тема 7

Основы теории ползучести и вязкоупругости

7.1. Механические модели вязкоупругих тел: модель Ньютона; модель Максвелла; модель Фойгта; модель Кельвина

См. доп.лит. [11, п. 99]

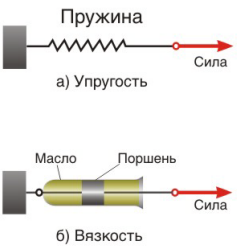
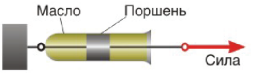


Рис. 7.1. Механические элементы простейших моделей вязкоупругости

Свойства элементов: $u_y = k_1 P; \dfrac{du_y}{dt} = k_2 P$.

Модель Ньютона

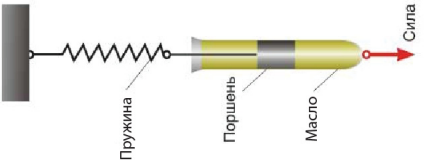
Модель вязкого тела по Ньютону:



$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$

Модель Максвелла

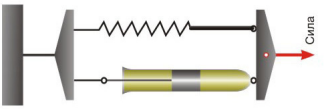
Модель вязкоупругого тела Максвелла:



$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}$$

Модель Фойгта

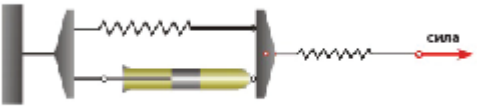
Модель вязкоупругого тела Фойгта:



$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Модель Кельвина

Модель вязкоупругого тела Кельвина:



$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E\left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \beta\varepsilon\right)$$

$$\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}; \ \beta = \frac{E_2}{\eta}; \ E = E_1.$$

Решения уравнений вязкоупругости для частных случаев»

- быстрого нагружения;
- медленного нагружения;
- постоянной деформации.

Более сложные варианты механических моделей вязкоупругих тел:

• другие сочетания трех элементов;

• четырёхэлементные модели.

Недостатки многокомпонентных моделей.

Где почитать ещё

Основная литература

[5] Глава 11

Дополнительная литература

[2]

[3]

[4]

[5]

[6]

[7] Глава 7, п. 7.6

[8] Часть II. Глава 18

[9]

[10] Глава 9

[11] Главы XI-XII, XVI

Основная литература

1. Бабкин, А.В. Прикладная механика сплошных сред: учебник для втузов: в 3 т. Т.1. Основы механики сплошных сред /А.В. Бабкин, В.В. Селиванов. – М.: Изд-во МГТУ, 2006. – 376 с.

2. Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материа-лов, чувствительных к виду напряжённого состояния. Опреде-ляющие соотношения: монография / А. А. Трещев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. – 264 с.

3. Маркин, А.А. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие / А.А Маркин, Д.В. Христич. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2007. – 92 с.

Дополнительная литература

1. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Высш. шк., 1979. – 318 с.

2. Бабкин, А.В. Прикладная механика сплошных сред : учебник для втузов: в 3 т. Т.1. Основы механики сплош-ных сред/А.В. Бабкин, В.В. Селиванов / под ред. В.В. Се-ливанова.– 3-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Ба-умана, 2006. – 376с.

3. Кошелев, А.И. Механика деформируемого твёрдого тела: Электронный учебник / А.И. Кошелев, М.А. Нарбут. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2002. – 288 с.

4. Петкевич, В.В. Основы механики сплошных сред : Учеб. пособие для вузов / В.В. Петкевич .– М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 400с.

5. Седов, Л.И. Механика сплошной среды: Учебник для вузов: В 2 т. Т.1 / Л.И. Седов; МГУ им. М.В. Ломоносова. – 6-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2004. – 528с.

6. Седов, Л.И. Механика сплошной среды : Учебник: В 2 т. Т.2 / Л.И. Седов; МГУ им. М.В. Ломоносова.– 6-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2004.

7. Горшков, А.Г. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: учебник для вузов / А. Г. Горшков, Л. Н. Рабинский, Д. В. Тарлаковский; под ред. Д. М. Климова. – М.: Наука, 2000.– 214 с.

8. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

9. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1979. – 560 с.

10. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности: Учеб.: Для вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.

11. Малинин Н.Н. Прикладная теории пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.

12. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1979. – 432 с.

13. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.

14. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

15. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

16. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление: Учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.