

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и
конструкции»
« 18 » января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой


_____ А.А. Трещёв

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе студентов
по дисциплине
«Прикладная теория пластичности и ползучести»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
08.04.01 «Строительство»

с направленностью (профилем)
Теория и проектирование зданий и сооружений

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-04-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Теличко В.Г., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях рассматриваются вопросы самостоятельного освоения дисциплины «Прикладная теория пластичности и ползучести». Существенное внимание уделяется изучению основ прикладной теории пластичности и ползучести, в том числе ознакомлению с методами решения прикладных задач, а также решением классических задач пластичности и ползучести, связанных со строительными материалами и конструкциями. Самостоятельная работа для студентов, обучающихся по программе 270800.68.01 – «Теория и проектирование зданий и сооружений» является основой учебной программы магистерской подготовки.

В указаниях рассмотрена методика самостоятельной работы студента по всему курсу.

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа способствует углублению, закреплению и обобщению теоретического материала, выявлению способностей студента к практическому решению прикладных инженерно-технических задач теории пластичности и ползучести.

Целью самостоятельной работы является изучение студентом основ прикладной теории пластичности и ползучести, в том числе ознакомлению с методами решения прикладных задач, а также решением классических задач пластичности и ползучести, связанных со строительными материалами и конструкциями. Студент должен получить обоснованное представление об использовании научных положений прикладной теории пластичности и ползучести в области строительства.

Очная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
3 семестр	
1	Выполнение контрольно-курсовой работы
2	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
3	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

Заочная форма обучения

№ п/п	Виды и формы самостоятельной работы
3 семестр	
1	Выполнение контрольно-курсовой работы
2	Подготовка к практическим (семинарским) занятиям
3	Подготовка к промежуточной аттестации и ее прохождение

2. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

2.1. Общие требования

Студенты по выданной рабочей программе с учетом рекомендуемой учебной и научной литературы должны самостоятельно изучить, отводимый для этих целей материал и подготовить реферат по индивидуальному заданию, выданному преподавателем. Реферат должен быть сдан на проверку до 15 недели семестра.

Реферат представляется в виде пояснительной записки (10 – 20 стр.), с необходимыми эскизами. Пояснительная записка должна содержать описание научной проблемы, современное состояние научных знаний в данном направлении, описание известных экс-

периментальных данных, анализ достоинства и недостатков известных методик решений решения прикладных задач теории пластичности и ползучести, границ их применимости, должны быть предложены возможные перспективные их приложения.

2.2. Темы для самостоятельной проработки

№ п/п	Наименование видов самостоятельной работы	Трудоёмкость (в академических часах)	Методические материалы
Очная форма обучения			
<i>3-й семестр</i>			
1	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины: 1. Зависимости между напряжениями и деформациями в состоянии пластичности	6	См. 9.1, [1,3-5]
2	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины: 2. Теория пластического течения	6	См. 9.1, [1,3-5]
3	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:3. Прикладные задачи теории течения	6	См. 9.1, [1,3-5]
4	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:4. Плоская деформация	6	См. 9.1, [1,3-5]
5	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:5. Предельное состояние строительных конструкций	6	См. 9.1, [1,3,4]
6	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:6. Приближенные методы решения прикладных задач	6	См. 9.1, [1,3-5] См. 9.2, [3]
7	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:7. Теория ползучести	6	См. 9.1, [1-4]
8	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:8. Прикладные задачи расчета на ползучесть	6	См. 9.1, [1,3,4]
9	Подготовка к практическим занятиям	26	См. 9.6.1
10	Выполнение ККР	10	См. 9.7.1
11	Подготовка доклада на конференцию	6	См. 9.3, [1-4]
12	Подготовка к зачету	18	
Итого		108	
Заочная форма обучения			
<i>3-й семестр</i>			
1	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины: 1. Зависимости между напряжениями и деформациями в состоянии пластичности	10	См. 9.1, [1,3-5]
2	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины: 2. Теория пластического течения	10	См. 9.1, [1,3-5]
3	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:3. Прикладные задачи теории течения	10	См. 9.1, [1,3-5]
4	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:4. Плоская деформация	10	См. 9.1, [1,3-5]
5	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:5. Предельное состояние строительных конструкций	10	См. 9.1, [1,3,4]
6	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:6. Приближенные методы решения прикладных задач	10	См. 9.1, [1,3-5] См. 9.2, [3]
7	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:7. Теория ползучести	8	См. 9.1, [1-4]
8	Самостоятельное изучение разделов содержания дисциплины:8. Прикладные задачи расчета на ползучесть	6	См. 9.1, [1,3,4]
9	Подготовка к практическим занятиям	26	См. 9.6.1

№ п/п	Наименование видов самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)	Методические материалы
10	Выполнение ККР	10	См. 9.7.1
11	Подготовка доклада на конференцию	6	См. 9.3, [1-4]
12	Подготовка к зачету	18	
Итого		134	

2.3. Методика самостоятельной работы

Предлагается два взаимодополняющих направления. Первое направление заключается в самостоятельном изучении студентом предложенных тем по литературе и в зале INTERNET. Второе направление заключается в обращении студента за консультацией к преподавателю за разъяснением сложных мест изучаемого материала и выясняет возможные направления развития теории на индивидуальных консультациях.

Завершается самостоятельная работа студента защитой реферата.

2.4. Защита реферата

Полностью законченный реферат, оформленный в виде пояснительной записки с приложением эскизов, сдается преподавателю на проверку за два – три дня до назначенного срока защиты. После проверки реферата преподавателем студент защищает его перед комиссией из двух преподавателей. Если при проверке реферата преподавателем обнаружены ошибки и неточности, то реферат возвращается студенту для доработки. После исправления ошибок реферат повторно проверяется и выносится на защиту.

2.5. Методические указания к работе над рефератом

2.5.1. План построения и содержание разделов реферата

Пояснительная записка состоит из следующих разделов:

- введение;
- основная часть (анализ напряженно-деформированного состояния и расчет связанных с ним конструкторско-технологических параметров конструкции или технологического процесса изготовления);
- выводы.

Во введении дается описание конструкции, технологического процесса, физико-механических свойств применяемого строительного материала, а также известные подходы к решению возникающей прикладной задачи теории пластичности и ползучести.

В основном разделе приводятся метод решения поставленной задачи, выбираемая модель деформируемого материала, граничные и начальные условия, решение моделирующей системы основных и определяющих уравнений. Решение должно быть наглядно проиллюстрировано; должны быть сделаны аналитические выводы, направленные на их прикладное использование.

В выводах отражается перспективность и возможность дальнейшего развития решения поставленной прикладной задачи в области строительных материалов и технологий.

2.6. Оформление реферата

Реферат открывается титульным листом. На нем приводятся сведения о министерстве, наименование университета и кафедры, тема контрольно-курсовой работы, подписи студента и руководителя проекта, город и год.

На второй странице приводится содержание реферата.

Реферат должна содержать: введение, основную часть, заключение, список использованных источников и приложения. Текстовая часть представляется в виде компьютерной распечатки с использованием любого текстового редактора на нелинованной бумаге формата А4,. Все страницы кроме титульного, нумеруются арабскими цифрами.

Изложение материала должно быть кратким, без лишних подробностей и повторов. Графики и рисунки нумеруются и подписываются. Формулы приводятся в общем виде с пояснением символов.

Каждая страница должна иметь рамку и штамп, оформленные в соответствии с ГОСТ Р 21.1101-92. Пояснительная записка должна быть сшита.

2.7. Оформление графической части реферата

Графическое оформление эскизов реферата должно выполняться с учетом ГОСТ 21.501-93.

3. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

3.1. Тема 1: Зависимости между напряжениями и деформациями в состоянии пластичности

Общие методические указания. Рассматриваются условия перехода материала в пластическое состояние. Формулируются зависимости между напряжениями и деформациями. Вводятся понятия простого и сложного нагружения деформируемых материалов.

В случае одноосного растяжения или сжатия пластические деформации возникают, когда напряжение достигает величины предела текучести материала (точка А на диаграмме растяжения на рис. 1, а). В теории пластичности понятия пределов текучести, пропорциональности и упругости не различаются. Если напряжение меньше предела текучести (точка В на диаграмме растяжения на рис. 1.1, а), материал деформирован упруго, а если больше (точка С на рис. 1.1, а) — упруго-пластически.

Для неодносного напряженного состояния пределы применимости закона Гука для элемента тела определяются условием начала пластичности.

При дальнейшем деформировании упрочняющегося материала предел текучести его увеличивается. При нагружении до точки, С (рис. 1.1, а) предел текучести увеличивается до АС. Теперь при нагружении в пределах от 0 до ОС соблюдается закон Гука. При увеличении напряжения сверх ас материал деформируется упруго-пластически. Напряжение ос является текущим пределом текучести, разграничивающим упругую разгрузку и нагружение, сопровождающееся дальнейшей пластической деформацией.

Для разграничения упругого и пластического деформирования упрочняющегося материала в общем случае напряженного состояния введем условие пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (0.1)$$

которое обычно принимают совпадающим по виду с условием начала пластичности. Существенное отличие между ними заключается в том, что в условие начала пластичности, входят постоянные для материала механические характеристики, например, пределы текучести при одноосных растяжениях или сжатиях, а в условие (1.1) должна входить еще и некоторая мера упрочнения. В качестве меры упрочнения q обычно принимают или работу пластической деформации

$$q = A^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (0.2)$$

или так называемый параметр Удквиста

$$q = \int d\bar{\varepsilon}_i^p. \quad (0.3)$$

Интегралы берутся по пути деформирования. В первом случае предполагают, что упрочнение материала определяется только работой пластической деформации, т. е. работой, затраченной на необратимую деформацию. Во втором считают, что мера упрочнения должна отражать накопленную пластическую деформацию. В дальнейшем будет показано, что для изотропных материалов использование двух рассмотренных мер упрочнения в случае условия пластичности Хубера—Мизеса приводит к одинаковым результатам.

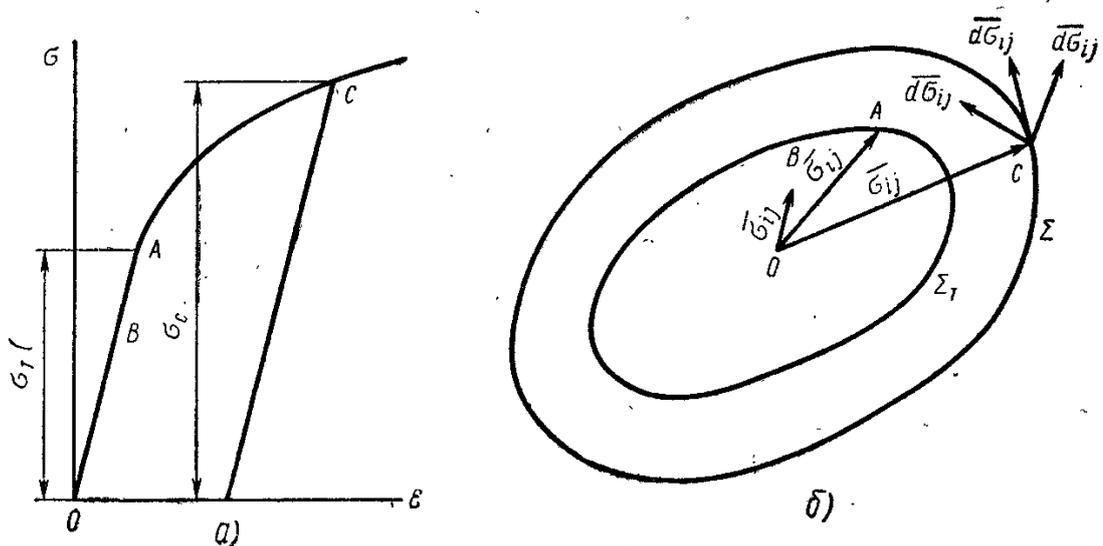


Рис. 1.1. Диаграмма растяжения (а). Поверхности начала пластичности Σ_T и пластичности Σ (б)

Уравнение D.1) является уравнением гиперповерхности пластичности 2 (рис. 1, б) в шестимерном пространстве компонентов тензора напряжения, которая для рассматриваемого состояния элемента среды разделяет области упругого и пластического деформирования.

Так же, как и поверхность начала пластичности Σ_T , она может быть изображена в трехмерном пространстве главных напряжений. Размеры, форма и положение поверхности пластичности зависят не только от конечного деформированного состояния, но и от всей истории деформирования. Если компоненты тензора напряжений σ_{ij} получают приращения $d\sigma_{ij}$, то это догружение может привести либо к упругой разгрузке, если вектор $d\bar{\sigma}_{ij}$ направлен внутрь поверхности нагружения, либо к нагружению при котором развиваются пластические деформации, если вектор $d\bar{\sigma}_{ij}$ направлен наружу поверхности нагружения, либо к так называемому нейтральному нагружению, если вектор $d\bar{\sigma}_{ij}$ лежит в касательной плоскости к поверхности нагружения, при этом материал деформируется упруго.

Рассмотрим понятие простого нагружения. *Простым* называют такое нагружение, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру.

В противном случае нагружение называют *сложным*. Иногда простым называют такое нагружение, при котором компоненты тензора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру. Очевидно, что при использовании второй формулировки первая выполняется.

В случае однородного напряженного состояния нагружение тела будет простым при возрастании внешних сил пропорционально одному общему для всех сил параметру. Это объясняется тем, что при однородном напряженном состоянии, возможном только в случае отсутствия массовых сил, деформированное состояние тоже будет однородным. Тогда дифференциальные уравнения равновесия и условия совместности деформаций выполняются тождественно.

Поэтому напряженное состояние определяется только граничными условиями, т. е. только поверхностными силами. При возрастании их пропорционально некоторому параметру напряжения, а следовательно, и компоненты девиатора напряжений во всех точках тела будут возрастать пропорционально тому же параметру и нагружение тела будет простым.

Рассмотрим случай простого нагружения. Пусть компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру β :

$$s_i = \beta s_{ij}^*,$$

где звездочкой отмечены некоторые постоянные значения компонентов девиатора напряжений, например, компоненты девиатора напряжений в конце нагружения. В последнем случае $0 \leq \beta \leq 1$.

имеем

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_i^*} d\bar{\varepsilon}_i^p.$$

Проинтегрируем это уравнение. Тогда получим, что в конце нагружения

$$\varepsilon_{ij}^{p*} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_i^*} \int d\bar{\varepsilon}_i^p. \quad (0.4)$$

Подставим полученные выражения в соотношение для интенсивности пластических деформаций. После преобразований с использованием зависимости устанавливаем

$$\varepsilon_i^{p*} = \int d\varepsilon_i^p, \quad (0.5)$$

откуда следует

$$d\varepsilon_i^p = d\bar{\varepsilon}_i^p.$$

Таким образом, в случае простого нагружения интенсивность приращения пластических деформаций $d\bar{\varepsilon}_i^p$ равна приращению интенсивности пластических деформаций $d\varepsilon_i^p$.

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0). \quad (0.6)$$

Добавляя к компонентам тензора (девиатора) пластической деформации компоненты девиатора упругих деформаций, получаем

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p}{\sigma_i} s_{ij}. \quad (0.7)$$

Подставим полученное выражение для компонентов девиатора полных деформаций в формулу. Тогда имеем

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p, \quad (0.8)$$

т. е. интенсивности полных, упругих и пластических деформаций обладают теми же аддитивными свойствами, что и сами деформации. Следовательно, из выражения (1.7) получаем

$$e_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij} \quad (0.9)$$

или

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\Phi(q)]^2 = 0, \quad (1.1)$$

где q — мера упрочнения. Тогда, устанавливаем

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_i^2 - \left[\Phi \left(\int d\bar{\varepsilon}_i^p \right) \right]^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$\sigma_i = \Phi \left(\int d\bar{\varepsilon}_i^p \right). \quad (1.2)$$

Выбор условия пластичности в виде соотношения (2.1) равносильно гипотезе о том, что интенсивность напряжений является функцией параметра Удквиста, не зависящей от типа напряженного состояния. Условие (2.1) или (2.2) по аналогии с условием начала пластичности Хубера—Мизеса может быть названо условием пластичности Хубера—Мизеса.

Рассмотрим определение функции Φ по диаграмме растяжения материала.

Для одноосного растяжения

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \sigma, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

$$d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_y^p = -\frac{d\varepsilon_z^p}{2} = -\frac{d\varepsilon^p}{2}$$

так как $d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_y^p$, а $d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0$. Поэтому имеем

$$\sigma_i = \sigma, \quad d\bar{\varepsilon}_i^p = d\varepsilon^p$$

и, следовательно,

$$\int d\bar{\varepsilon}_i^p = \int d\varepsilon^p = \varepsilon^p.$$

Таким образом, в случае одноосного растяжения получаем

$$\sigma = \Phi(\varepsilon^p).$$

Следовательно, для определения функции Φ по диаграмме растяжения материала необходимо построить график зависимости напряжения от пластической деформации: Рассмотрим построение этого графика. Возьмем некоторую точку A на диаграмме растяжения материала (рис. 4.8) и проведем через нее линию AB , параллельную первоначальной прямой нагружения. Из точки B пересечения этой линии с осью абсцисс восстановим перпендикуляр до пересечения в точке C с горизонтальной линией, проведенной через точку A . Абсцисса точки C равна пластической деформации, а ордината — соответствующему ей напряжению. Поэтому кривая $КС$ является графиком зависимости интенсивности напряжений от параметра Удквиста.

При использовании соотношения (2.1) поверхностью пластичности в трехмерном пространстве главных напряжений является круговой цилиндр (цилиндр Хубера—Мизеса. В процессе, нагружения радиус цилиндра непрерывно увеличивается. Величина его согласно выражению (2.1) зависит от истории деформирования. Следами цилиндров на

девиаторной плоскости являются окружности радиусов $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i$ (рис. 2.2, а). Наименьший

радиус равен $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$. При отсутствии упрочнения поверхность пластичности совпадает

с поверхностью начала пластичности и следом ее на девиаторной плоскости является

окружность радиуса $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$ (рис. 3,-б).

Используя соотношение (2.1), имеем

$$\delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3\delta_{ij}s_{ij} = 0$$

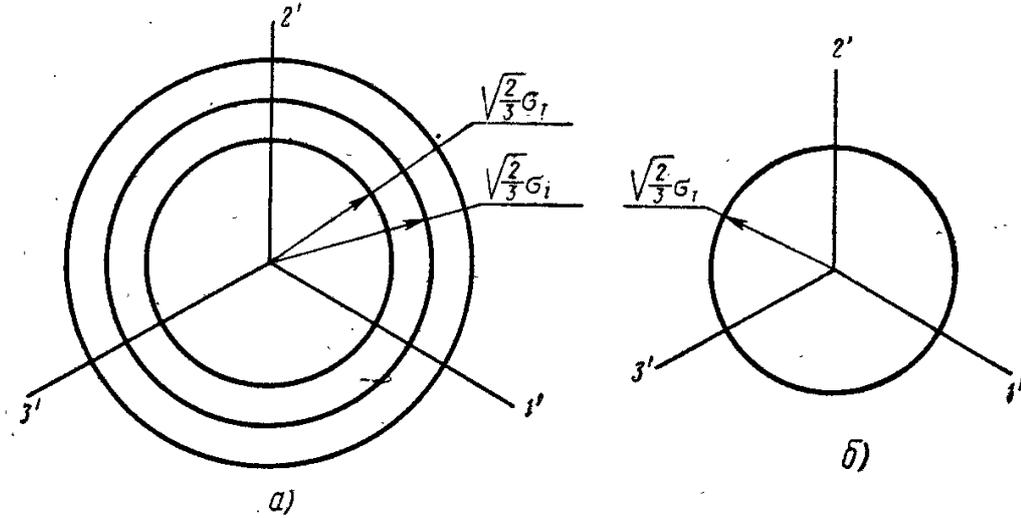


Рис.2.2. Следы цилиндров Хубера—Мизеса на девиаторной плоскости при наличии (а) и отсутствии (б) упрочнения

получаем

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3d\lambda s_{ij}$$

Таким образом, при использовании условия пластичности

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3s_{ij}$$

$$d\lambda = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i},$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \quad (1.3)$$

Из формулы (2.3) следует, что компоненты тензора приращений пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений.

Используя разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор, имеем

$$\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \int (s_{ij} + \delta_{ij}\sigma_0) d\varepsilon_{ij}^p = \int s_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + \int \delta_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \sigma_0 = \int s_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + \int \sigma_0 d\varepsilon_{ij}^p.$$

Очевидно, что второе слагаемое в этом выражении равно нулю, поскольку тензор пластических деформаций является девиатором. Таким образом, получаем

$$\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \int s_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \int \frac{2}{3} \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} s_{ij} s_{ij} = \int \sigma_i d\bar{\varepsilon}_i^p. \quad (1.4)$$

Если принять, что интенсивность напряжений является функцией работы пластической деформации

$$\sigma_i = \varphi\left(\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p\right)$$

то

$$\sigma_i = \varphi\left(\int \sigma_i d\bar{\varepsilon}_i^p\right)$$

Таким образом, гипотеза о том, что интенсивность напряжений является функцией работы пластической деформации, равносильна гипотезе, утверждающей, что она зависит от параметра Удквиста.

Приращения компонентов упругих деформаций

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{1+\mu} d\sigma_0 \right).$$

Добавляя их к компонентам приращений пластических деформаций, получаем компоненты приращений полных деформаций

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{1+\mu} d\sigma_0 \right) + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0). \quad (1.5)$$

В координатной форме уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_x - \mu(d\sigma_y + d\sigma_z) \right] + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0), \\ &\dots\dots\dots \\ d\gamma_{zx} &= \frac{d\tau_{zx}}{G} + 3 \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Эти соотношения являются основными уравнениями теории течения.

Компоненты приращения пластической деформации являются функциями компонентов напряжения. Поэтому приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ также в конечном счете является функцией компонентов напряжения. Однако они не являются независимыми, так как удовлетворяют условию пластичности.

Поэтому условие относительного максимума функции приращения пластической работы $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ по способу множителей Лагранжа запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p - d\lambda f) = 0,$$

где $d\lambda$ — множитель Лагранжа, откуда следует, что

$$ds_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.7)$$

т. е. функция $f(\sigma_{ij})$ — пластический потенциал.

3.3. Тема 3: Прикладные задачи теории течения

Общие методические указания. На основе ранее изложенной теории пластичности приводится решение прикладных задач, характерных для строительных технологий и конструкций: кручение бруса, напряженно-деформированное состояние толстостенных труб и дисков, изгиб круглых и кольцевых пластин. Рассматривается возможное использование решений в инновационных проектах.

Представим себе призматический скрученный брус произвольного поперечного сечения, задний торец которого закреплен так, что линейные перемещения всех точек его в направлениях осей x и y равны нулю, а передний торец свободен (рис. 3.1).

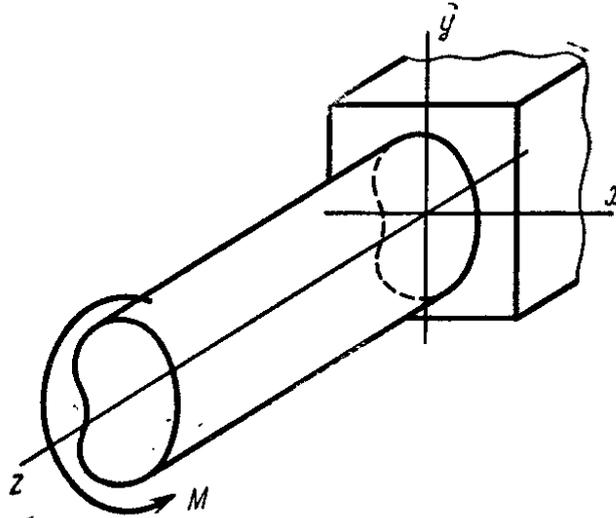


Рис. 3.1. Скрученный брус некруглого поперечного сечения

В таком случае кручение бруса будет чистым, т. е.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (2.1)$$

Дифференциальные уравнения равновесия в рассматриваемой задаче принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Из первых двух уравнений (3.2) следует, что напряжения не меняются по длине бруса, т. е. все поперечные сечения бруса находятся в одинаковых условиях. Последнее уравнение (3.2) будет удовлетворяться тождественно, если ввести функцию напряжений Φ , положив

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Так же, как и в задаче упругого кручения, для односвязного контура можно принять, что функция напряжений на контуре равна нулю. Далее так же, как в упомянутых задачах, крутящий момент связан с функцией напряжений соотношением

$$M = 2 \int_F \Phi dF. \quad (2.4)$$

Используем в решении задачи принцип возможных изменений напряженного состояния.

Подсчитаем вначале работу приращений всех внешних сил на перемещениях точек приложения этих сил. Она равна работе приращения момента δM на угле поворота свободного торца бруса $\varphi = \theta l$, где θ — относительный угол закручивания бруса; l — длина бруса.

$$\int_S \delta X_{vi} u_i dS = \delta M \theta l$$

или

$$\int_S \delta X_{vi} u_i dS = 2\theta l \delta \int_F \Phi dF. \quad (2.5)$$

Подсчитаем теперь дополнительную работу для всего бруса. Поскольку распределение напряжений во всех сечениях одно и та же,

$$\tilde{R} = \int_v R dV = l \int_F R dF.$$

Так как в случае чистого сдвига

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_i = \sqrt{3}\tau, \quad \varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}},$$

где

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2}$$

$$R = \int_0^{\tau} \gamma d\tau$$

и следовательно

$$\tilde{R} = l \int_F dF \int_0^{\gamma} \gamma d\tau \quad (2.6)$$

Далее получим

$$\delta I = 0 \quad (2.7)$$

где

$$I = \int_F \left(\int_0^{\tau} \gamma d\tau - 2\theta\Phi \right) dF \quad (2.8)$$

Вариационное уравнение (3.7) может быть решено методом Ритца, при этом функция Φ выбирается в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i, \quad (2.9)$$

все функции $\Phi_i = \Phi_i(x, y)$ обращаются в нуль на контуре. Коэффициенты C_i определяются из условий равенства нулю вариаций интеграла (3.8), которые имеют вид

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0. \quad (2.10)$$

Вследствие нелинейности диаграммы сдвига условия (3.10) приводят к нелинейной системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_i составление и решение которой даже при небольших n связано со значительными трудностями. В связи с этим воспользуемся методом последовательных приближений.

Связь между касательным напряжением τ и угловой деформацией γ представим в виде

$$\tau = G_k \gamma, \quad (2.11)$$

где G_k — переменный параметр упругости, определяемый формулой

$$G_k = \frac{\tau_{k-1}^*}{\gamma_{k-1}}, \quad (2.12)$$

На основании соотношений (3.11) и (3.12) имеем

$$G_k = G_{k-1} \frac{\tau_{k-1}^*}{\tau_k}. \quad (2.13)$$

Выражение (3.8) принимает вид

$$I = \int_F \left(\frac{\tau^2}{2G_k} - 2\theta\Phi \right) dF. \quad (2.14)$$

В таком случае нелинейная система уравнений для коэффициентов C_i приводится к последовательности линейных систем.

Рассмотрим решение задачи толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой по теории течения. В изложенном ниже решении материал трубы не будем считать несжимаемым ($\mu = 0,5$), поскольку это не упрощает решения задачи.

В решении, задачи по теории течения удобно принять, что напряжения в трубе являются функциями двух переменных: радиуса r и радиуса границы, разделяющей упругую и пластическую области r_T . Дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (2.15)$$

Выражения для напряжений на основании соотношений могут быть представлены в форме

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= s_r + \sigma_0 = s_r + 3K\varepsilon_0, \\ \sigma_t &= s_t + \sigma_0 = s_t + 3K\varepsilon_0, \\ \sigma_z &= s_z + \sigma_0 = -(s_r + s_t) + 3K\varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Подставляя эти зависимости в формулу (3.14), получаем иную форму дифференциального уравнения равновесия:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r - s_t}{r} + 3K \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} = 0. \quad (2.17)$$

Перейдем к выводу условия совместности деформаций. Получим величину средней линейной деформации

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right). \quad (2.18)$$

Введем вспомогательную переменную

$$\alpha = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right). \quad (2.19)$$

Эти две величины примем за основные неизвестные.

Из соотношений (3.18) и (3.19) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{3}{2}(\varepsilon_0 + \alpha), \\ \varepsilon_t = \frac{u}{r} &= \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$u = \frac{3}{2} r (\varepsilon_0 - \alpha). \quad (2.21)$$

Продифференцировав выражение (3.21) по r и сопоставив его с первым из соотношений (3.20), получим условие совместности деформаций в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 2 \frac{\alpha}{r}. \quad (2.22)$$

Рассмотрим вначале напряжения и деформации в упругой области ($r_T \leq r \leq r_2$). Компоненты девиатора напряжений связаны зависимостями с компонентами девиатора, из которых следует, что

$$s_r = 2G e_r, \quad s_t = 2G e_t. \quad (2.23)$$

компоненты девиатора деформаций

$$\left. \begin{aligned} e_r &= \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + 3\alpha), \quad e_t = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - 3\alpha), \\ e_z &= -\varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Поэтому компоненты девиатора напряжений

$$\left. \begin{aligned} s_r &= G(\varepsilon_0 + 3\alpha), \\ s_t &= G(\varepsilon_0 - 3\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Уравнение равновесия (3.17) после использования зависимостей (3.25) принимает вид

$$(G + 3K) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} + 3G \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 6G \frac{\alpha}{r} = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r}$ из формулы (3.22), получаем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{2\alpha}{r} = 0.$$

Решение выведенного уравнения имеет вид

$$\alpha = \frac{A}{r^2} \quad (2.26)$$

где A — функция r_T .

Подставим выражение (3.26) в уравнение (3.22). Тогда получим

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} = 0,$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_0 = B, \quad (2.27)$$

где B — функция r_T .

Далее получим выражения для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (G + 3K)B + \frac{3GA}{r^2}, \\ \sigma_t &= (G + 3K)B - \frac{3GA}{r^2}, \\ \sigma_z &= (-2G + 3K)B. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Величины А и В определяются из краевых условий:

при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$;

при $r = r_T$ $\sigma_t = \sigma_T$.

Из первого краевого условия имеем

$$(G + 3K)B + \frac{3GA}{r_2^2} = 0. \quad (2.29)$$

Из второго краевого условия, используя соотношения (3.28), устанавливаем

$$(GB)^2 + \frac{3(GA)^2}{r_T^4} = \frac{\sigma_T^2}{9}. \quad (2.30)$$

Решая уравнения относительно А и В, получаем

$$A = -\frac{p^* r_2^2}{3G}, \quad B = \frac{p^*}{G + 3K}, \quad (2.31)$$

$$p^* = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[3 \left(\frac{G}{G + 3K} \right)^2 + \frac{r_2^4}{r_T^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

Следовательно, согласно формулам (3.28) и (3.31) формулы для напряжений в упругой области принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p^* \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right), \\ \sigma_t &= p^* \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z &= p^* \frac{3K - 2G}{3K + G}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Выражение для радиального перемещения и в упругой области получаем

$$u = \frac{3}{2} p^* \left(\frac{r}{G + 3K} + \frac{r_2^2}{3Gr} \right). \quad (2.34)$$

3.4. Тема 4: Плоская деформация

Общие методические замечания. Формулируются основные уравнения плоской деформации, описывается метод линий скольжения для решения задач плоской деформации, приводятся прикладные задачи и их решение.

Представим себе, что тело, размеры которого в направлении оси z значительны, нагружено уравновешенной системой сил, приложенных к боковой поверхности и не изменяющихся по длине тела (рис. 4.1). В таком случае напряжения, перемещения и деформации не зависят от координаты z . Сечения тела, перпендикулярные оси z , при его деформации

не искривляются. Они могут перемещаться поступательно как жесткие плоскости вдоль оси z . Примем, что эти перемещения равны нулю

$$u_z = 0 \quad (3.1)$$

Поскольку сечения, перпендикулярные оси z , не искривляются, касательные напряжения в этих сечениях равны нулю, т. е.

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (3.2)$$

и, следовательно, эти сечения являются главными.

Рассматриваемую деформацию тела называют плоской.

Предположим, что тело несжимаемо. Используем схему идеального жестко-пластического тела. Решение упруго-пластических задач плоской деформации связано со значительными трудностями. Простейшая упруго-пластическая задача плоской деформации — задача расчета Толстостенной трубы, нагруженной внутренним Давлением и осевой силой.

Решение жестко-пластических задач плоской деформации имеет большое практическое значение для исследования технологических операций, таких как прокатка, волочение, прессование, а также для определения предельных нагрузок при 'указанном выше нагружении тел.

При использовании диаграммы деформирования, изображенной на рис. 5.17, в теле наряду с пластическими областями ($\sigma_i = \sigma_T$) возможно возникновение жестких областей ($\sigma_i < \sigma_T$).

$$\varepsilon_z = 0 \quad (3.3)$$

Поэтому как по теории упруго-пластических деформаций, так и по теории течения для несжимаемого тела имеем $\sigma_z = \sigma_0$ и, следовательно

$$\sigma_z = \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (3.4)$$

Подставляя эту величину в условие пластичности, получаем

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 2\tau_T, \quad (3.5)$$

где $\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ - предел текучести при чистом сдвиге.

Два первых дифференциальных уравнения равновесия при отсутствии объемных сил с использованием соотношений (4.2) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

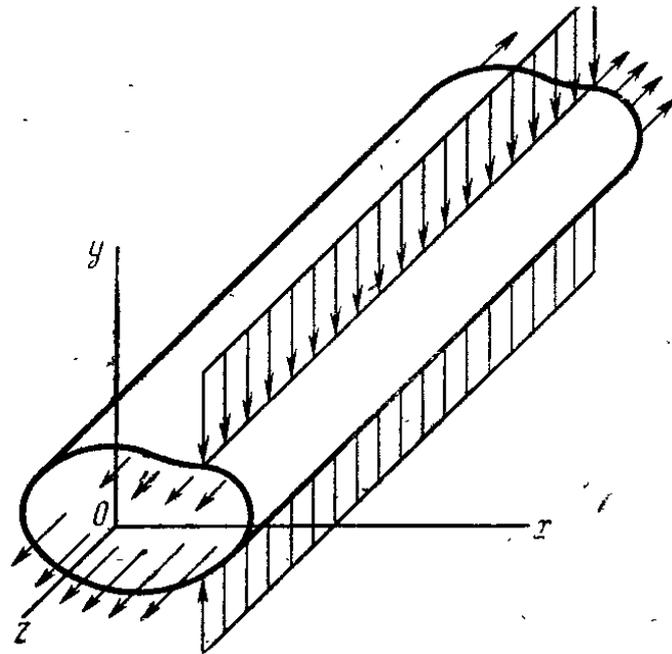


Рис. 4.1. Нагружение тела в условиях плоской деформации

Третье дифференциальное уравнение равновесия удовлетворяется тождественно. Если на границе тела заданы напряжения, то три уравнения (4.5) и (4.6) позволяют определить компоненты напряжения независимо от деформаций (если использовать теорию упруго-пластических деформаций) или скоростей деформаций (если использовать теорию течения). Такие задачи называют статически определяемыми. Статическая определяемость напряжений является в некоторой степени условной, поскольку для определения напряжений к уравнениям равновесия необходимо присоединить условие пластичности. После определения компонентов напряжений могут быть найдены деформации или скорости деформаций. В дальнейшем, как это обычно принято, будем говорить об определении скоростей деформаций равновесия или скоростей перемещений. Использование понятий скоростей деформаций и скоростей перемещений не означает учета фактора времени в развитии пластических деформаций. Это просто удобная запись, позволяющая избежать использования понятий приращений деформаций в случае применения теории течения.

Выводим два дифференциальных уравнения относительно скоростей перемещения ϑ_x и ϑ_y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \\ \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Первое из этих уравнений является условием пропорциональности девиаторов скорости деформации и напряжения и условием совпадения направлений главных скоростей деформации и напряжений, а второе условием несжимаемости тела.

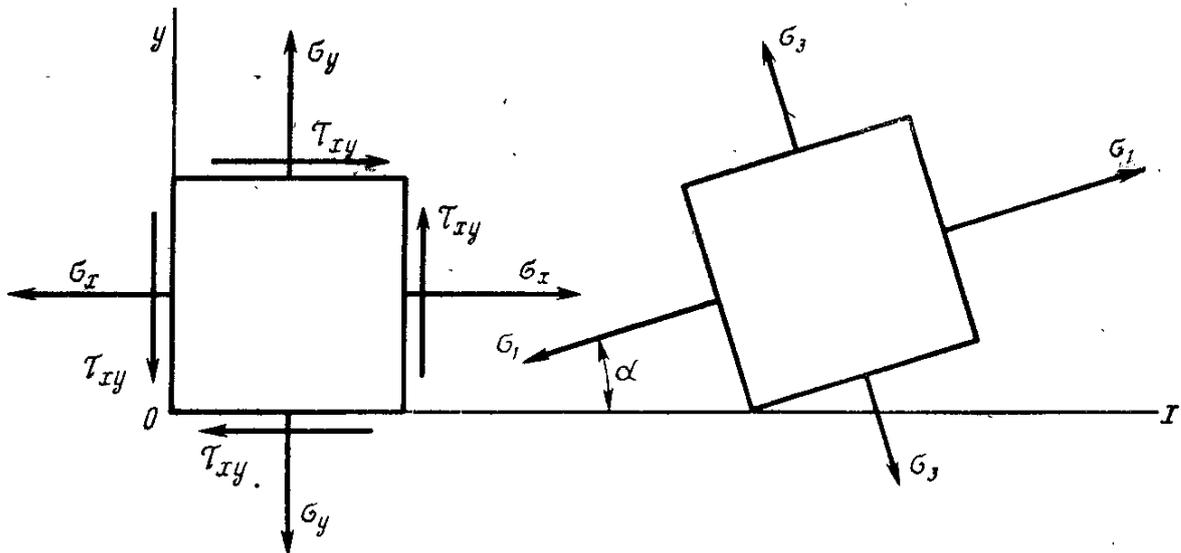


Рис. 4.2. Исходные и главные площадки в условиях плоской деформации

Интегрируя уравнения (4.7), можно определить скорости перемещений.

Если на всей или на части границы тела заданы не напряжения, а скорости перемещения, то задача определения напряжений не является статически определимой. В этом случае напряжения и скорости перемещения определяют путем совместного решения уравнений (4.5)—(4.7).

Рассмотрим некоторые особенности напряженного состояния, возникающего в случае плоской деформации тела при $\epsilon_z = 0$. Как отмечалось выше, сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси z , является главной площадкой. Поэтому в рассматриваемой задаче положение одной главной площадки известно. В таком случае положение двух других главных площадок, параллельных оси z , определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.8)$$

где α — угол между главной осью 1 и осью x (рис. 4.2).

Выражения для главных напряжений имеют вид

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.9)$$

причем, учитывая соотношение (4.4), заключаем, что знак плюс в этой формуле определяет наибольшее σ_1 а знак минус — наименьшее σ_3 главные напряжения.

Из формулы (4.9) следует, что наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3.10)$$

Таким образом, согласно соотношениям (4.9), (4.4) и (4.10)

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \tau_{\max}, \quad \sigma_2 = \sigma_0, \quad \sigma_3 = \sigma_0 - \tau_{\max}. \quad (3.11)$$

Следовательно, напряженное состояние в условиях плоской деформации можно рассматривать как результат наложения всестороннего равного растяжения с напряжением σ_0 на чистый сдвиг с касательным напряжением τ_{\max} (рис. 4.3).

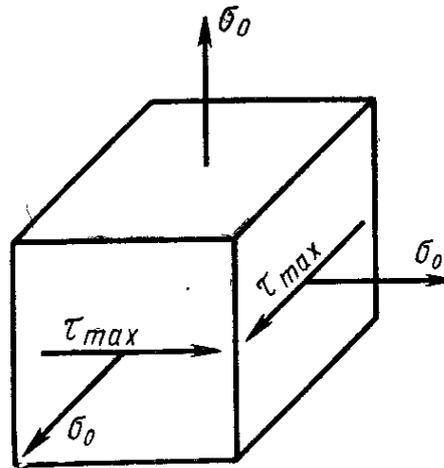


Рис. 4.3. Напряженное состояние в условиях плоской деформации

Линии скольжения. Площадки действия максимальных касательных напряжений, проходящие через ось z , делят пополам углы между главными площадками, в которых возникают наибольшее σ_1 и наименьшее σ_3 главные напряжения. Назовем линиями скольжения — линии, касающиеся всеми своими точками площадок максимальных касательных напряжений. Очевидно, что имеются два ортогональных семейства линий скольжения, лежащих в плоскости xy . Понятие линий скольжения не связано только с задачей плоской деформации. Примером линий скольжения являются линии Чернова, которые можно наблюдать на поверхности плоского полированного образца при его растяжении за пределами упругости. Линии Чернова наклонены под углом 45° к оси образца, так как в площадках под углом 45° к оси возникают наибольшие касательные напряжения.

Обозначим два взаимно-ортогональных семейства линий скольжения через a и b (рис. 9.4). Если угол наклона касательной к одной из линий скольжения семейства a в некоторой точке равен φ , то тогда угол наклона касательной к линии скольжения семейства b в той же точке равен $\varphi + \frac{\pi}{2}$ (рис. 4.4).

Дифференциальные уравнения семейств линий скольжения a и b имеют соответственно вид:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (3.12)$$

Поскольку напряженное состояние в условиях плоской деформации можно рассматривать как наложение всестороннего равного растяжения с главными напряжениями σ_0 на чистый сдвиг с касательным напряжением τ_{\max} , бесконечно малый элемент, выделенный линиями скольжения, испытывает одинаковое растяжение в направлении линий скольжения (рис. 4.5).

Выразим компоненты напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в некоторой точке через тригонометрические функции угла α наклона касательной к линии скольжения, проходящей через эту точку.

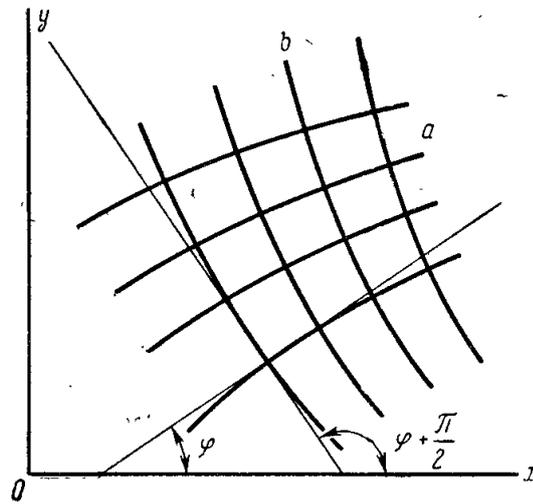


Рис. 4.4. Линии скольжения

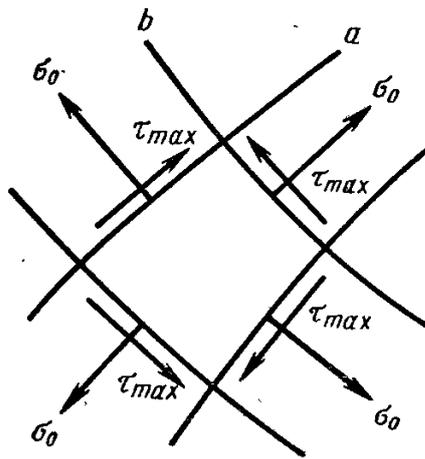


Рис. 4.5. Напряженное состояние элемента, выделенного линиями скольжения

Для этого вначале вспомним зависимости компонентов напряжений в площадках, проходящих через ось z , от главных напряжений σ_1 и σ_3

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

где α — угол наклона к оси x нормали к площадке, в которой возникает главное напряжение σ_1 (рис. 9.6).

Так как

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_z,$$

то по формуле (4.4)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (3.14)$$

Далее из соотношений (4.10) и (4.5) заключаем

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_T \quad (3.15)$$

Поскольку площадки действия максимальных касательных напряжений делят пополам углы между главными площадками (рис. 4.6), то

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{4}. \quad (3.16)$$

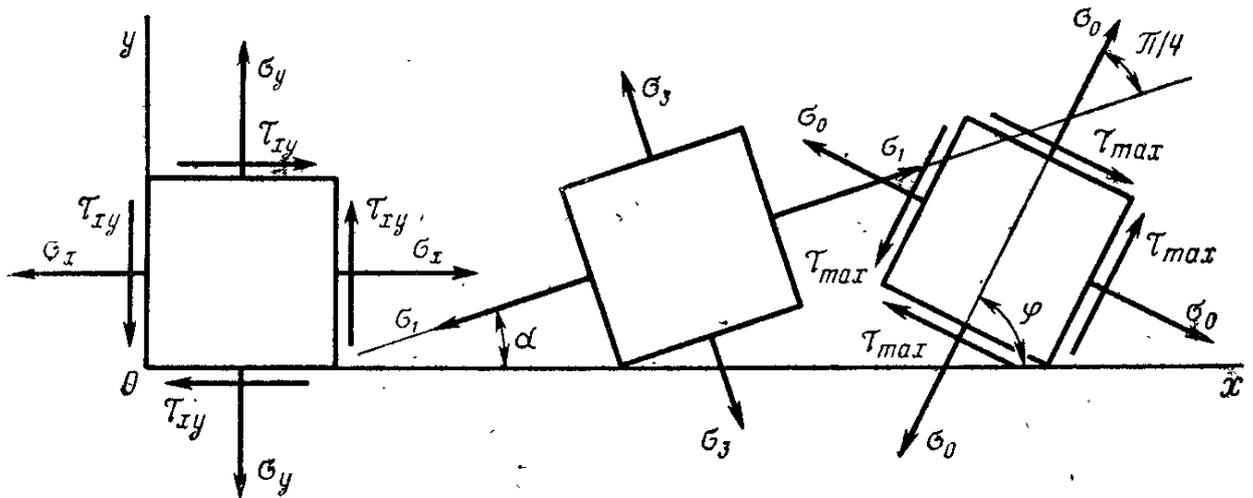


Рис. 4.6. Напряжения в различных площадках в условиях плоской деформации

Преобразуем формулы (4.13), используя соотношения (4.14)— (4.16). Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \tau_T \sin 2\varphi, \\ \sigma_y &= \sigma_0 - \tau_T \sin 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= -\tau_T \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Подставив эти соотношения в условие пластичности (4.5), можно убедиться, что последнее тождественно удовлетворяется. Таким образом, для определения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} по формулам (4.17) необходимо знать две величины σ_0 и φ .

Внося соотношения (4.17) в уравнения равновесия (4.6), получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для функций σ_0 и φ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} + 2\tau_T \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} + 2\tau_T \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Поскольку в этой системе частные производные только в первой степени, ее называют квазилинейной.

Докажем, что система уравнений (4.18) является гиперболической. Для этого возьмем в плоскости x и y некоторую кривую, вдоль которой будем считать функции σ_0 и φ известными. Тогда

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_0 &= \frac{\partial\sigma_0}{\partial x} dx + \frac{\partial\sigma_0}{\partial y} dy, \\ d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Уравнения (4.18) и (4.19) являются системой четырех линейных алгебраических уравнений относительно частных производных $\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Решение этой системы может быть представлено в форме определителей. Частные производные определяются единственным образом всегда, кроме случая, когда вдоль рассматриваемой линии определитель системы равен нулю. Такие линии называют характеристиками системы дифференциальных уравнений.

Уравнения характеристик имеют вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\tau_T \cos 2\varphi & 2\tau_T \sin 2\varphi \\ 0 & 1 & 2\tau_T \sin 2\varphi & -2\tau_T \cos 2\varphi \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0,$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2ctg 2\varphi \frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\frac{dy}{dx} = tg \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -ctg \varphi. \quad (3.20)$$

Как известно, если:

- 1) два корня уравнения действительны и различны, систему уравнений называют гиперболической;
- 2) два корня уравнения одинаковы — параболической,
- 3) оба корня уравнения комплексные — эллиптической.

Таким образом, система уравнений (4.18) является гиперболической и, как следует из сопоставления уравнений (4.12) и (4.20), характеристики совпадают с линиями скольжения.

Если координатные оси s_a и s_b в каждой точке будут направлены по касательным к линиям скольжения (рис. 4.7), то, полагая в дифференциальных уравнениях (4.18) $\varphi = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_a} (\sigma_0 + 2\tau_T \varphi) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s_b} (\sigma_0 - 2\tau_T \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что эти уравнения являются дифференциальными уравнениями равновесия элемента, вырезанного линиями скольжения. Интегрируя их, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\tau_T} + \varphi &= \xi, \\ \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\tau_T} - \varphi &= \eta, \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

где ξ и η — постоянные вдоль линий скольжения соответственно а и б величины. При

переходе от одной линии скольжения a (или b) к другой параметр ξ (или η) изменяется. Решая уравнения (4.21) относительно σ_0 и φ , устанавливаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \tau_T (\xi + \eta), \\ \varphi &= \frac{1}{2} (\xi - \eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Последние уравнения позволяют по известным величинам ξ и η определить σ_0 и φ , а затем при помощи формул (4.7) компоненты напряжения.

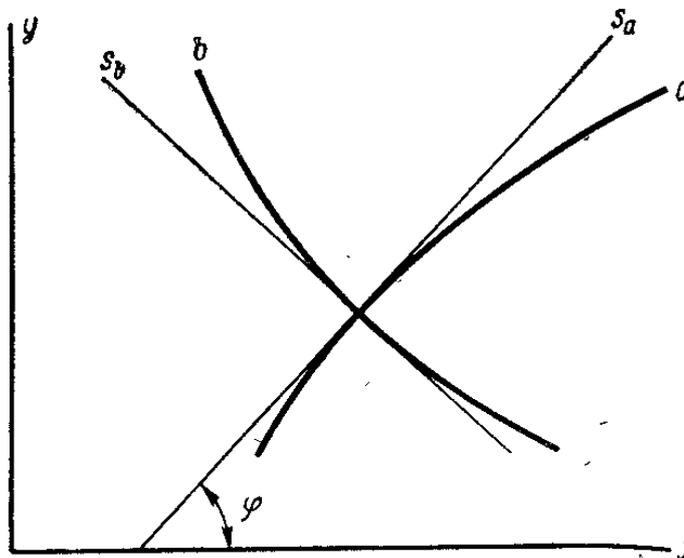


Рис. 4.7. Система координат s_a s_b , оси которой направлены по касательным к линиям скольжения

3.5. Тема 5: Предельное состояние строительных конструкций

Общие методические замечания. Вводятся основные понятия предельного состояния конструкции, а также статическая и кинематическая теоремы, с использованием которых связан анализ несущей способности конструкций. На конкретных примерах с определенными исходными предпосылками строительной науки и технологии разбирается применение теории для анализа несущей способности строительных конструкций

Решение пластических задач в предположении, что материал идеальный жестко пластический, имеет большое практическое значение для определения предельных нагрузок конструкций, а также вычисления усилий деформирования в различных технологических операциях. Однако даже при ограничении условием плоской деформации (см. предыдущую тему) решение в ряде случаев связано с большими трудностями. Эти трудности возрастают при переходе к общему случаю деформирования.

Поэтому большое значение имеют методы приближенной оценки нагрузок, соответствующих предельному состоянию по схеме идеального жестко-пластического тела.

Ниже изложены статическая и кинематическая теоремы, позволяющие дать двустороннюю оценку предельных нагрузок, приведены примеры применения их, а также дано полное решение некоторых задач предельного состояния.

Назовем статически возможным состоянием тела такое состояние, для которого удовлетворены условия на поверхности для напряжений и уравнения равновесия в каждой

В случае одной силы получаем

$$P^* < P$$

что и требовалось доказать.

Статическая теорема устанавливает приближение для предельной нагрузки снизу. Рассматривая различные статически возможные состояния, можно подсчитать различные нагрузки, меньшие предельной. Наибольшая из них будет ближе всего к предельной нагрузке.

Метод определения предельной нагрузки путем рассмотрения статически возможных состояний называют статическим.

Назовем кинематически возможным состоянием тела такое состояние, для которого удовлетворены условия на поверхности для перемещений и условия совместности деформаций в каждой точке тела. Уравнения равновесия могут быть не удовлетворены. Очевидно, что точки, изображающие напряженные состояния в точках тела, находящегося в кинематически возможном состоянии, лежат на поверхности начала пластичности, так как иначе согласно схеме идеального жестко-пластического тела деформирование невозможно. Обозначим эти точки M^{**} , а тензоры напряжений, соответствующие им, σ_{ij}^{**} (рис. 5.2).

Кинематическая теорема. Нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию, больше, чем предельная нагрузка.

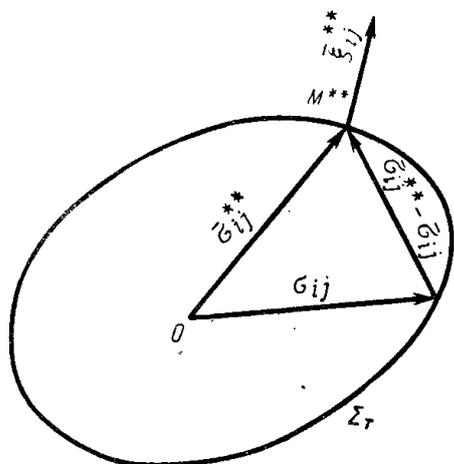


Рис. 5.2. К доказательству кинематической теоремы

Основные уравнения задачи предельного состояния круглых и кольцевых пластин. Из курса сопротивления материалов известно, что несущая способность балки исчерпывается (балка становится геометрически изменяемой) при наличии в ней упругой области. Решение задачи об упруго-

пластическом состоянии пластин связано со значительными трудностями даже в простейшем случае осесимметричного нагружения из материала, диаграмма деформирования которого не имеет упрочнения. Этот вопрос исследован в работах и др.

Изучение упруго-пластического изгиба круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин позволило установить, что и отличие от изгиба балок несущая способность пластин в большинстве случаев исчерпывается при отсутствии упругой области, т. е. когда во всех точках пластин интенсивность напряжений достигает пеллины предела текучести материала.

Как следует из изложенного ниже, в решении задачи определения предельных нагрузок для круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин используются как уравнения равновесия, так и гипотеза о характере деформации пластины (гипотеза прямолинейных нормалей), заменяющая условия совместности деформаций. Поэтому полученное решение будет полным.

При рассмотрении чисто пластического изгиба круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин примем, что срединная плоскость их не растягивается, и используем те же допущения, что и при расчетах пластин в пределах упругости, а именно: 1) точки, расположенные на некоторой прямой, перпендикулярной к срединной плоскости пластины, после ее деформации также лежат на прямой, перпендикулярной деформированной срединной поверхности (гипотеза Кирхгофа), 2) нормальные напряжения в плос-

костях, параллельных срединной плоскости, отсутствуют. Как и при расчетах пластин в пределах упругости, будем пренебрегать касательными напряжениями в окружных сечениях и плоскостях, параллельных срединной плоскости. Используя второе допущение, заключаем, что напряженное состояние во всех точках пластин является двухосным.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента пластины имеет вид

$$\frac{d}{dr}(M_r r) - M_t = -Qr, \quad (4.1)$$

где M_r и M_t — интенсивности изгибающих моментов соответственно в окружном и радиальном сечениях; Q — интенсивность поперечной силы в окружном сечении.

Интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t связаны с нормальными напряжениями в окружном и радиальном сечениях σ_r и σ_t соотношениями:

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz, \quad M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t z dz \quad (4.2)$$

где z — расстояние от некоторой точки пластины до срединной плоскости; h — толщина пластины.

Зависимости скоростей радиальной ξ_r и окружной ξ_t деформаций от скорости χ угла поворота ϑ нормали к срединной плоскости пластины определяются формулами

$$\xi_r = z \frac{d\chi}{dr}, \quad \xi_t = z \frac{\chi}{r} \quad (4.3)$$

которые легко получить дифференцированием по времени зависимостей деформаций от угла поворота.

Из последних выражений следует, что отношение этих скоростей деформаций

$$\eta = \frac{\xi_r}{\xi_t} = \frac{r}{\chi} \frac{d\chi}{dr} \quad (4.4)$$

является функцией только радиуса r . Зависимости компонентов скоростей деформаций от компонентов напряжений по теории течения для жестко-пластического материала ($\varepsilon_0 = 0$) имеют вид:

$$\xi_r = \frac{3}{2} \frac{\xi_t}{\sigma_t} (\sigma_r - \sigma_0), \quad \xi_t = \frac{3}{2} \frac{\xi_t}{\sigma_t} (\sigma_t - \sigma_0) \quad (4.5)$$

где σ_t — интенсивность напряжений; ξ_t — интенсивность деформаций; σ_0 — среднее нормальное напряжение.

В рассматриваемом случае ($\sigma_z = 0$)

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2}, \quad (4.6)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{3}. \quad (4.7)$$

Поскольку принимается, что диаграмма деформирования не имеет упрочнения $\sigma_t = \sigma_r$ и, следовательно,

$$\sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2} = \sigma_r. \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что

$$\eta = \frac{2\sigma_r - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r} \quad (4.9)$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{2+\eta}{2\eta+1} \sigma_r \quad (4.10)$$

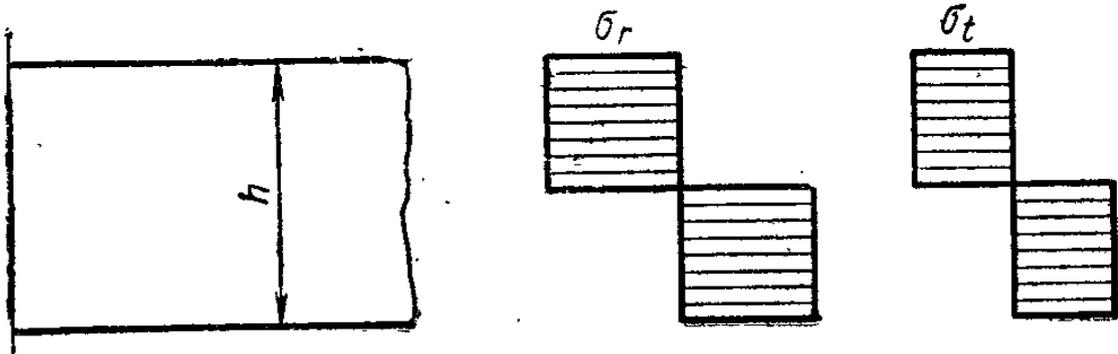


Рис. 5.3. Эпюры окружных и радиальных напряжений по высоте для пластины, находящейся в предельном состоянии

Учитывая, что η является функцией только радиуса, заключаем, что напряжения являются функцией только радиуса и, следовательно, в пределах изменения $z: -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$ и $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$ напряжения по высоте пластины не изменяется. Эпюры напряжений по высоте пластины имеют вид "двух прямоугольников" (рис. 5.3). Отличие от эпюры напряжений в сечении пластического шарнира балки только в том, что величины напряжений не равны пределу текучести материала.

Устанавливаем, что

$$M_r = \sigma_r \frac{h^2}{4}, \quad M_t = \sigma_t \frac{h^2}{4} \quad (4.11)$$

Выражая напряжения через интенсивности изгибающих моментов и подставляя их в соотношение (5.8), получаем

$$M_r^2 - M_r M_t + M_t^2 = M_T^2 \quad (4.12)$$

где

$$M_T = \sigma_T \frac{h^2}{4} \quad (4.13)$$

Как следует из формулы (5.13), величина M_T определяется только пределом текучести материала и толщиной пластины h , и для рассматриваемой пластины — постоянная величина.

Уравнения (5.1) и (5.12) являются основными уравнениями для исследования несущей способности пластин.

Краевые условия имеют вид:

- 1) для круглой пластины в центральной точке $M_r = M_t$
- 2) для пластины, нагруженной по контуру равномерно распределенным моментом интенсивности m на контуре $M_r = \pm m$;
- 3) для пластины со свободным или опертым контуром $M_r = 0$;
- 4) для пластины с заделанным контуром $\vartheta = 0$, $\chi = 0$ и, как следует $\sigma_r = 2\sigma_t$ и $M_r = 2M_t$

3.6. Тема 6: Приближенные методы решения прикладных задач

Общие методические замечания. На конкретных примерах подробно разбираются приближенные методы решения прикладных задач. Особое внимание уделяется пространственному методу, основанному на принципе минимума полной энергии, а также методам, основанным на принципе возможных изменений напряженного состояния. Рассматриваются вариационные методы.

Плита высотой h с отверстием диаметра d растянута в условиях плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$) силой, величина которой на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, $P, \frac{MN}{m}$ (рис. 6.1).

Примем за статически возможное состояние такое, при котором в заштрихованной части плиты напряжения равны нулю, а в верхней и нижней полосках высотой $\frac{h-d}{2}$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_x = const.$$

Из условия пластичности имеем

$$\sigma_x = 2\tau_T \quad (5.1)$$

Уравнение равновесия приводит к следующей величине предельной нагрузки, определенной статическим методом:

$$p^* = 2\tau_T (h-d) \quad (5.2)$$

Найдем предельную нагрузку кинематическим методом. Выберем за кинематически возможное такое состояние, в котором пластическая область сосредоточена в наиболее ослабленном месте в окрестности отверстия. Тогда поле линий скольжения состоит из логарифмических спиралей, примыкающих к контуру отверстия, и сетки прямых линий (равномерного поля) у прямолинейных границ плиты (рис. 10.14). Эти поля смыкаются в точке C , расстояние которой от центра отверстия r_c . Поля скоростей и напряжений в пластических областях ABC и CDE могут быть легко определены. При этом их мощность положительна $\sigma_{ij}^{**} \dot{\xi}_{ij}^{**} > 0$, т. е. поля напряжений и скоростей согласованы. Различные кинематически возможные состояния и соответствующие им нагрузки будут зависеть от положения точки C . Нагрузка для некоторого кинематически возможного состояния

$$P^{**} = 2 \int_{\frac{d}{2}}^{r_c} \sigma_t dr + 2 \int_{r_c}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dr \quad (5.3)$$

где σ_t — окружные напряжения в ABC ; σ_x — напряжения в области CDE .

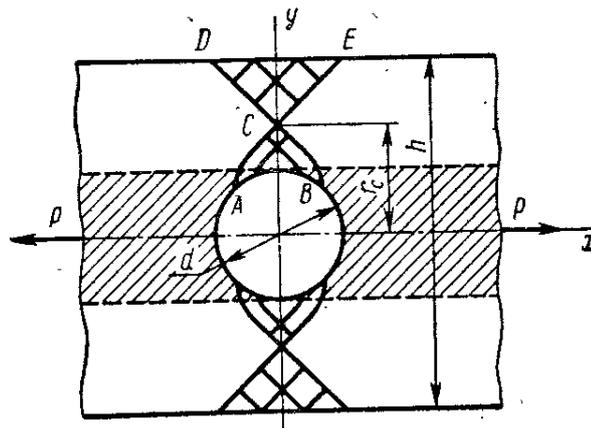


Рис. 6.1. Плита с отверстием, растянутая силой $P, \text{ MN/m}$

Напряжения в области ABC, определяем при $p_{np} = 0$, т. е.

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln \frac{2r}{d}, \quad \sigma_t = 2\tau_T \left(1 + \ln \frac{2r}{d} \right) \quad (5.4)$$

$$P^{**} = 2\tau_T (h-d) + 4\tau_T \int_{\frac{d}{2}}^{r_c} \ln \frac{2r}{d} dr$$

Второе слагаемое в этом выражении положительно и увеличивается с увеличением r_c . Поэтому наименьшее значение P^{**} при $r_c = \frac{d}{2}$

$$P_{\min}^{**} = 2\tau_T (h-d) \quad (5.5)$$

Закключаем, что нагрузки, соответствующие статически и кинематически возможному состояниям, совпадают, т. е. эти формулы определяют действительную предельную нагрузку и приведенное решение является полным.

3.7. Тема 7: Теория ползучести

Общие методические замечания. Приводятся основные результаты экспериментального изучения ползучести, кривые ползучести, понятие о длительной прочности. Обсуждаются наследственные теории, технические теории ползучести и теория старения. Вводятся понятия неустановившейся и установившейся ползучести, длительной прочности.

Напряжения и деформации, возникшие при нагружении деталей, изменяются во времени, даже если нагрузки остаются постоянными. Это явление называют ползучестью материала. Одну сторону этого явления — изменение во времени деформаций — называют собственно ползучестью или последствием, а другую — изменение во времени напряжений — релаксацией.

Последствие может быть упругим и пластическим. При упругом последствии деформации, возникшие во времени, после разгрузки уменьшаются и с течением времени совсем исчезают, при пластическом они в основном необратимые и после разгрузки уменьшаются во времени медленно и в незначительной степени. На рис. 7.1 графически изображены процессы упругого (рис. 7.1, а) и пластического (рис. 7.1, б) последствия в случае

постоянного во времени напряжения, меньшего предела пропорциональности материала при температуре испытания.

Деформация, возникшая при нагружении (OA), равная ϵ^0 , с течением времени увеличивается (кривая AB). При разгрузке уменьшение деформации (BC) так же, как и в случае кратковременного испытания на растяжение, равно упругой деформации ϵ^0 . В дальнейшем после разгрузки деформации уменьшаются (кривая CD). Это явление называют обратным последствием или обратной ползучестью. Ниже оно будет рассмотрено более подробно.

В случае упругого последствия возникшие во времени деформации исчезают полностью (рис. 7.1, а), а в случае пластического процесс уменьшения деформаций с течением времени затухает (рис. 7.1, б).

В дальнейшем будем рассматривать пластическое последствие, которое для краткости назовем просто последствием или собственно ползучестью. Ползучесть возникает как при нагружении детали за пределы упругости, так и при нагружении в пределах упругости.

Экспериментальные исследования показали (рис. 7.2), что охлаждение образца без

его разгрузки не сказывается на ходе процесса ползучести в целом. После нагрева образца ползучесть возобновляется с той же скоростью, как и перед охлаждением. Охлаждение, сопровождаемое разгрузкой, отражается на кривой ползучести.

В этом случае после нагрева и нагрузки на кривой ползучести образуется горб, соответствующий проявлению первой стадии ползучести, о которой будет сказано ниже.

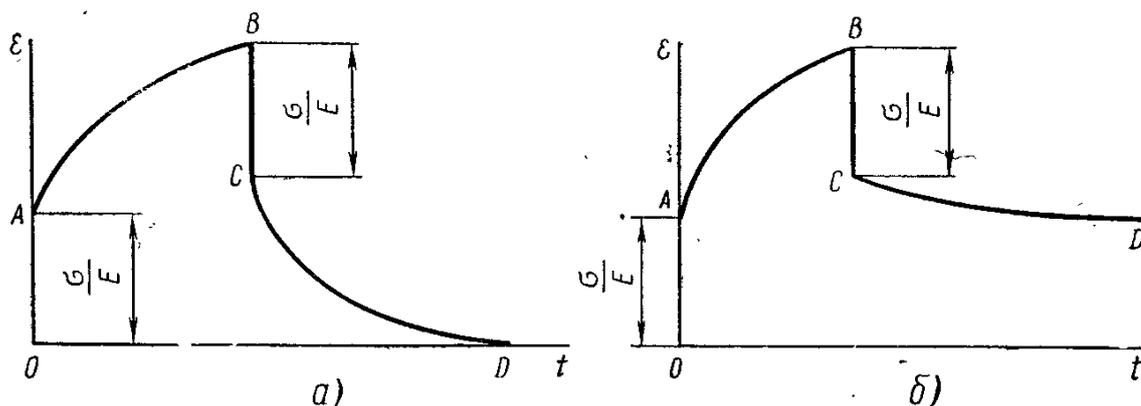


Рис. 7.1. Графики, иллюстрирующие явления упругого (а) и пластического (б) последствия

Таким образом, в случае кратковременных перерывов в подаче тока к нагревательным печам разгружать образцы нецелесообразно. Имеющиеся в литературе сведения отображают влияние на ход процесса ползучести кратковременных (10—30 мин) охлаждений. Однако известны испытания с длительным охлаждением, которые также не оказали влияния на процесс ползучести (рис. 7.3).

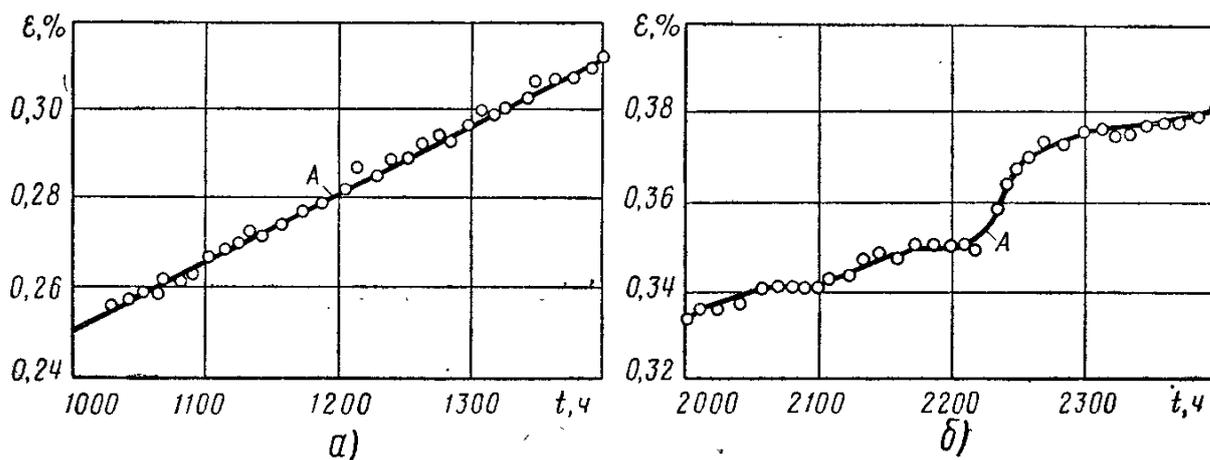


Рис. 7.2. Участки кривых ползучести, полученные при испытании образцов стали ЭИ454 при температуре 550° С и напряжении 90 МН/м²:

а — охлаждение в точке А без разгрузки; б — охлаждение в точке А с разгрузкой.

Рассмотрим более подробно явление релаксации при постоянной деформации. Предположим, что образец нагружен растягивающей силой, которая вызвала напряжение, меньшее предела пропорциональности материала при данной температуре, и испытание поставлено таким образом, что полная деформация образца в течение времени не изменяется.

Полная деформация, остающаяся во времени постоянной, является суммой упругой деформации ε^e и деформации, образовавшейся в процессе ползучести ε^c , т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c$$

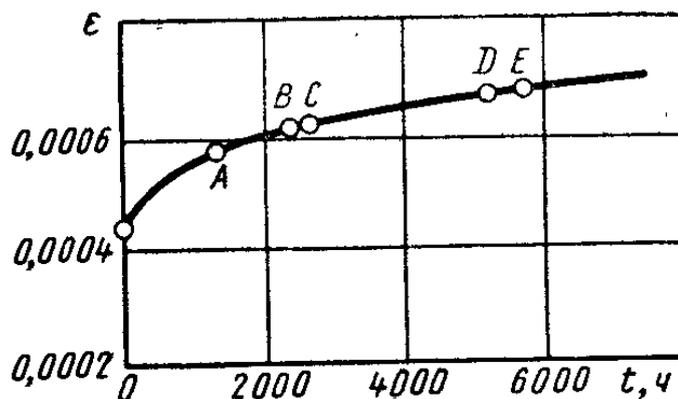


Рис. 7.3. Кривая ползучести, полученная при испытании образцов хромоникелемолибденовой стали при температуре 400°C и напряжении $77,5\text{ АШ/м}^2$ с охлаждением без разгрузки [26]. Продолжительность охлаждения: в точке А — 118 ч; В — 53 ч; С — 54 ч; D — 93 ч; E — 120 ч,

Деформация ползучести ε'' возрастает во времени, а следовательно, упругая деформация ε' уменьшается. Таким образом, в течение времени составляющие полной деформации перераспределяются.

На основании закона Гука

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

Поскольку полная деформация во времени не изменяется и равна начальному значению $\varepsilon(0)$ и, кроме того, в начальный момент времени справедлив закон Гука, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E}$$

где $\sigma(0)$ — напряжение в начальный момент времени.

Тогда получим

$$\frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^c \quad (6.1)$$

Дифференцируя это соотношение по времени, устанавливаем

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{d\varepsilon^c}{dt} = -\xi^c \quad (6.2)$$

Из выражения (7.1) заключаем, что за счёт увеличения деформации ползучести напряжение будет непрерывно уменьшаться, однако деформация ползучести при релаксации не может увеличиваться беспрестанно. Если представить себе, что деформация ползучести достигла величины деформации, возникшей при нагружении $\varepsilon(0)$, то напряжение в стержне становится равным нулю (стержень разгружается).

В процессе ползучести деформация растёт до такой величины, при которой образец разрушается. В процессе релаксации деформация ползучести не превосходит величины деформации, образовавшейся при нагружении.

При экспериментальном изучении релаксации в случае растяжения начальную растягивающую нагрузку (а следовательно, и напряжение) понижают с течением времени так, чтобы длина образца, определенная начальной нагрузкой, сохранялась постоянной.

На основании испытаний строят график зависимости напряжения от времени, который называют кривой релаксации (рис. 7.4). Для стальных и чугунных деталей явление ползучести существенно при повышенных температурах (ориентировочно более 300°C) и

чем она выше, тем интенсивнее протекает этот процесс. При небольших температурах изменение во времени деформаций и напряжений, возникших в результате нагружения, незначительно и им можно пренебречь.

Однако для ряда материалов, как например, для металлов с низкой температурой плавления (свинец, алюминий, дуралюмин и др.), а также для высокополимерных материалов (резина, каучук, пластмассы и др.) явление ползучести весьма заметно и при комнатной температуре.

Таким образом, вопрос о необходимости расчета детали на ползучесть должен решаться в зависимости от материала, температуры нагрева и степени напряженности детали.

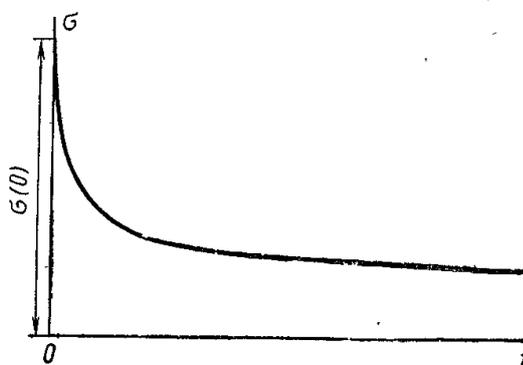


Рис. 7.4. Кривая релаксации

Обычно ползучесть учитывается при расчете и конструировании деталей машин, находящихся в процессе эксплуатации длительное время в нагретом состоянии. В таких условиях работают, например, элементы конструкций паровых и газовых турбин, реактивных двигателей, ядерных реакторов, паровых котлов, узлы оборудования нефтяной промышленности, детали химических аппаратов и тепловых приборов.

Особенностью расчетов на ползучесть является учет фактора времени, который в обычных расчетах на статическую нагрузку во внимание не принимается.

Расчеты деталей на ползучесть в основном базируются на результатах экспериментального изучения ползучести материала при одноосном растяжении нагрузкой, постоянной во времени.

Кривые ползучести. При нагружении образца деформация его возрастает от нуля до некоторой величины. Деформация, возникшая при нагружении, может быть либо упругой, либо упруго-пластической в зависимости от величины напряжения, при котором производится испытание. В течение времени деформация образца увеличивается. Обычно результаты экспериментального изучения ползучести обрабатывают в виде графиков (рис. 7.5), представляющих зависимость от времени деформаций при постоянных напряжениях и температуре. Эти графики называют кривыми ползучести.

Вид кривых ползучести зависит от напряжения и температуры, при которых испытывался образец. При нагружении нагретого образца деформация весьма быстро возрастает от нуля до некоторой величины (отрезок OA на рис. 7.6). Если напряжение не превосходит предела пропорциональности материала образца, то эта часть деформации является упругой, в противном случае эта деформация* состоит из упругой и пластической (остаточной) деформации.

После прекращения роста нагрузки, полная деформация нагретого образца будет постепенно увеличиваться во времени по закону, изображенному линией $ABCD$. Ординаты этой линии представляют собой величины деформаций ϵ для определенного значения времени.

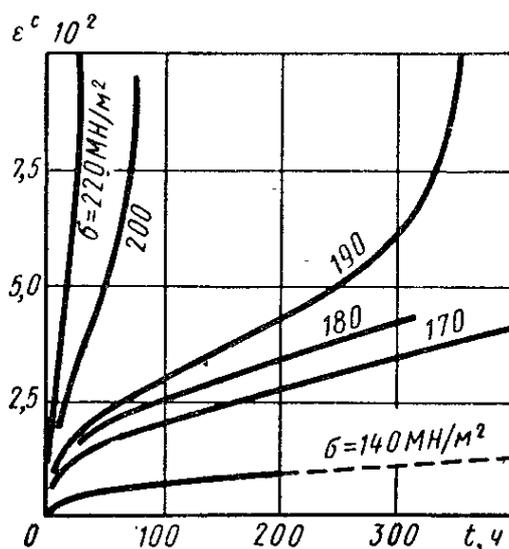


Рис.7.5. Кривые ползучести стали ЭИ756 при температуре 600° С

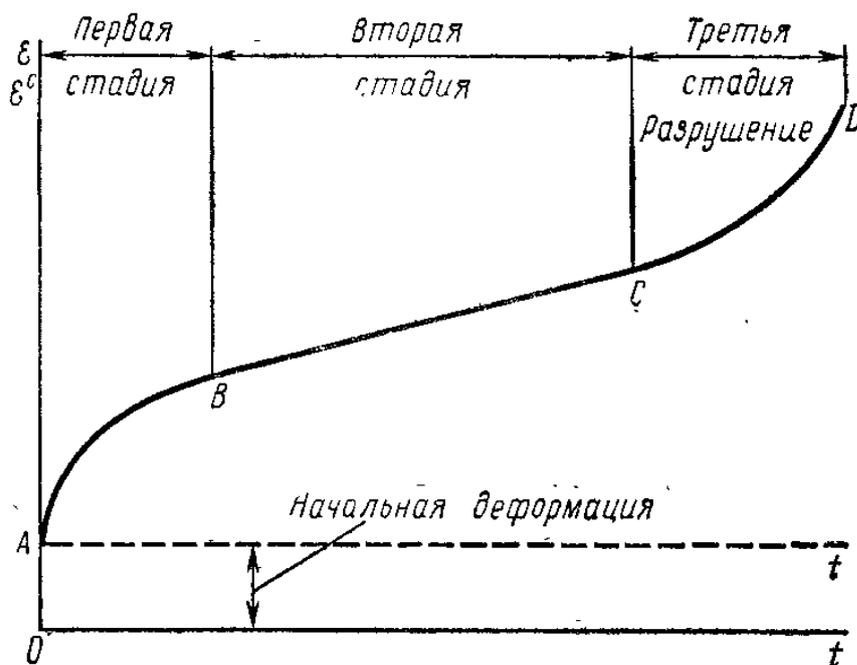


Рис. 7.6. Кривая ползучести

Они складываются из деформации, возникшей при нагружении, и деформации ползучести.

Иногда на графике изображается зависимость от времени только одной деформации ползучести ε^c , тогда ось абсцисс графика расположена так, как это показано штриховой линией на рис. 7.6. Тангенс угла наклона касательной к линии ABCD с осью абсцисс выражает в масштабе скорость деформации, равную скорости деформации ползучести ξ^c .

$$\xi = \xi^c = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^c}{dt} \quad (6.3)$$

Процесс ползучести можно разделить на три стадии.

В первой стадии (участок АВ) скорость деформации ползучести постепенно уменьшается. Бейли объяснил это уменьшение скорости взаимодействием механического упрочнения и термического разупрочнения. В первой стадии преобладает механическое упрочнение, связанное с ростом деформации ползучести.

Во второй стадии (участок ВС) устанавливается равновесие между механическим

упрочнением и термическим разупрочнением и процесс ползучести протекает с минимальной постоянной во времени скоростью ξ_{\min}^c , которая зависит от напряжения и температуры. При определенной температуре она будет функцией напряжения

$$\xi_{\min}^c = Q(\sigma)$$

Наиболее экспериментально проверенной является степенная зависимость минимальной скорости деформации ползучести от напряжения

$$\xi_{\min}^c = Q(\sigma) = k\sigma^n \quad (6.4)$$

и закон гиперболического синуса

$$\xi_{\min}^c = Q(\sigma) = c \cdot sh \frac{\sigma}{d} \quad (6.5)$$

Величины k , n , c и d в формулах (7.4) и (7.5) для каждого материала зависят от температуры. В дальнейшем будет использоваться формула (7.4), поскольку она, как показано ниже, достаточно хорошо согласуется с данными опытов и удобна для использования в расчетах. Зависимость (7.5) несколько лучше подтверждается экспериментальными данными, чем выражение (7.4), но ее использование для расчетных целей более сложно, и численные значения коэффициентов; и d , входящих в формулу (7.5), менее изучены, чем значения коэффициентов k и n в зависимости (7.4).

3.8. Тема 8: Прикладные задачи расчета на ползучесть

Общие методические замечания. Приводится решение прикладных задач установившейся ползучести изогнутого бруса, релаксации крутящего момента в поперечном сечении кольцевого бруса, установившейся ползучести толстостенных труб.

Чистый изгиб бруса. Рассмотрим чистый изгиб бруса, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии x и y , причем одна из них (ось y) лежит в плоскости изгиба (рис. 8.1). Если механические свойства материала в условиях ползучести при растяжении и сжатии одинаковы, ось симметрии x является нейтральной.

При чистом изгибе бруса поперечное сечение его остается плоским. Поэтому деформация является линейной функцией расстояния y от нейтральной оси x . Поскольку, при установившейся ползучести условиям совместности деформации должны удовлетворять компоненты деформации ползучести, имеем

$$\varepsilon^c = y\chi^c \quad (7.1)$$

где χ^c — кривизна оси бруса, образовавшаяся за счет ползучести материала.

Получаем

$$\sigma = \left(\frac{\chi^c}{\Omega} \right)^{\frac{1}{n}} |y|^{\frac{1}{n}-1} y. \quad (7.2)$$

Форма уравнения обусловлена изменением знака напряжения σ при изменении знака координаты y . Составим выражение изгибающего момента

$$M = \int_F \sigma y dF$$

Подставляя в него соотношение, имеем

$$M = \left(\frac{\chi^c}{\Omega} \right)^{\frac{1}{n}} \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF \quad (7.3)$$

Назовем интеграл в выражении А3.3) обобщенным моментом инерции поперечного сечения относительно оси x и обозначим его

$$J_{nx} = \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF \quad (7.4)$$

Из соотношения (8.3), воспользовавшись выражением (8.4), представим кривизну изогнутой оси балки, возникшую в результате ползучести материала, в виде

$$\chi^c = \left(\frac{M}{J_{nx}} \right)^n \Omega \quad (7.5)$$

Из выражений (8.2) и (8.5) получаем формулу для нормального напряжения в поперечном сечении бруса

$$\sigma = \frac{M |y|^{\frac{1}{n}-1}}{J_{nx}} y \quad (7.6)$$

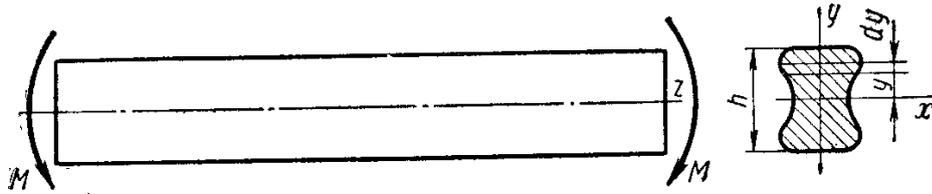


Рис. 8.1. Брус, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии

Для бруса прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h из формулы (8.4) устанавливаем

$$J_{nx} = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^{\frac{n+1}{n}} dy$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$J_{nx} = \alpha_1 b h^{\frac{2n+1}{n}} \quad (7.7)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}} \cdot \frac{n}{2n+1} \quad (7.8)$$

Для бруса круглого полого сечения с наружным диаметром D и внутренним диаметром d по формуле (8.4)

$$J_{nx} = 4 \int_0^{\frac{D}{2}} y^{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy - 4 \int_0^{\frac{d}{2}} y^{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2} dy$$

Положим в первом и втором интегралах соответственно

$$\xi_1 = \frac{2y}{D}, \quad \xi_2 = \frac{2y}{d}.$$

Тогда получим

$$J_{nx} = \frac{D^{\frac{3n+1}{n}}}{2^{\frac{n+1}{n}}} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right] I, \quad (7.9)$$

где

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-\xi^2} \xi^{\frac{n+1}{2}} d\xi$$

При помощи подстановки

$$\xi^2 = u, \quad d\xi = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

этот интеграл может быть приведен к виду

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}n} du$$

Поскольку бэ́та-функция или эйлеров интеграл первого рода определяется равенством

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

имеем

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{2n+1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Бэ́та-функция двух аргументов связана с гамма-функцией или эйлеровым интегралом второго рода этих аргументов соотношением

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2} + \frac{3}{2}\right)}$$

Последнее выражение при помощи известных в теории специальных функций формул

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi} \Gamma(2s)$$

а также соотношений

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

приводится к виду

$$I = \frac{2^{\frac{1}{2}n}}{3n+1} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n}\right)}$$

Поэтому согласно формуле (8.9) имеем

$$J_{nx} = \alpha_2 D^{\frac{3n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{3n+1}{n}} \right] \quad (7.10)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{n}{2(3n+1)} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n}\right)} \quad (7.11)$$

Для сплошного круглого бруса диаметром D имеем

$$J_{nx} = \alpha_2 D^{\frac{3n+1}{n}} \quad (7.12)$$

Аналогично для бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенное кольцо со средним диаметром D и толщиной стенки δ , по формуле (8.4) получим

$$J_{nx} = \alpha_3 D^{\frac{2n+1}{n}} \delta \quad (7.13)$$

где

$$\alpha_3 = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n}\right)} \quad (7.14)$$

На рис. 8.2 представлены графики зависимостей этих коэффициентов от показателя степени n .

Максимальное нормальное напряжение можно получить по формуле (8.6), полагая $y = \frac{h}{2}$ (h — высота поперечного сечения).

Тогда имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_{nx}} \quad (7.15)$$

где W_{nx} — обобщенный момент сопротивления изгибу поперечного сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \frac{J_{nx}}{h^{\frac{1}{n}}} \quad (7.16)$$

Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_{nx} = \frac{n}{2(2n+1)} bh^2 \quad (7.17)$$

Для круглого полого сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_2 D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right] \quad (7.18)$$

Для круглого сплошного сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_2 D^3 \quad (7.19)$$

Для тонкостенного кольца

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_3 D^2 \delta \quad (7.20)$$

На рис. 8.3 представлены графики зависимостей $\frac{\sigma}{M/W_x}$ от $\frac{2y}{h}$ построенные по формулам (8.6)—(8.8). Эти графики характеризуют вид эпюр распределения напряжений в прямоугольном поперечном сечении бруса

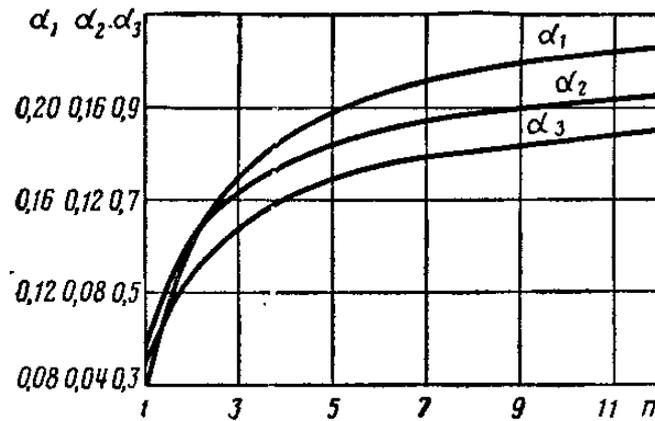


Рис. 8.2. Графики зависимостей коэффициентов α_1 и α_3 от показателя степени n

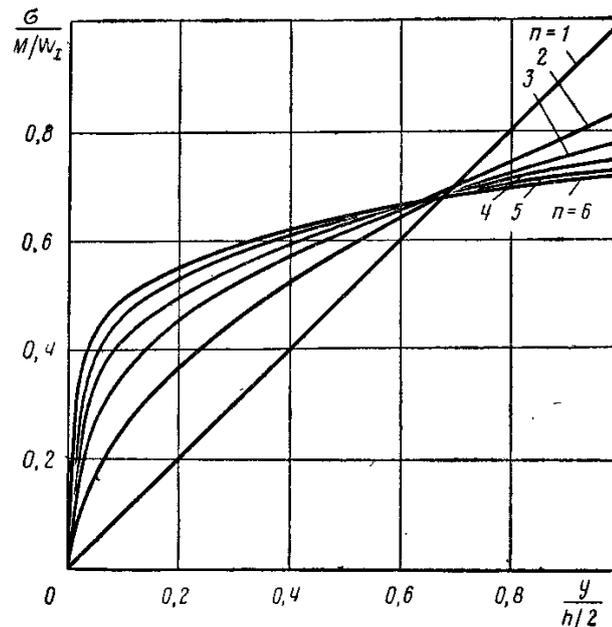


Рис 8.3. Эпюры безразмерных нормальных напряжений в прямоугольном поперечном сечении изогнутого бруса в условиях установившейся ползучести при различных значениях показателя степени n

в случае различных величин показателя степени n при установившейся ползучести. Из Графиков рис. 8.3 заключаем, что максимальное нормальное напряжение при ползучести меньше, чем максимальное нормальное напряжение в начальный момент времени. Далее из этих графических следует, что чем выше показатель степени n , тем значительно уменьшается наибольшее нормальное напряжение и нормальные напряжения выравниваются по сечению. Как уже отмечалось, расчеты на установившуюся ползучесть эквивалентны расчетам на прочность и жесткость при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями. Поэтому для решения задачи установившейся ползучести изогнутого бруса может быть использован один из вариационных методов. Рассмотрим применение принципа минимума дополнительной работы для исследования установившейся ползучести равномерно нагретого бруса прямо- угольного поперечного сечения при чистом изгибе. Поскольку в условиях ползучести изменение объема равно нулю, а напряженное состояние при чистом изгибе является одноосным, то в формуле (8.9) можно положить $K = \infty$, $\sigma_i = \sigma$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i^c = \varepsilon^c$.

Тогда получим

$$R = \int_0^{\sigma} \varepsilon^c d\sigma$$

Используя степенную зависимость деформации ползучести от напряжения (8.13), имеем

$$R = \int_0^{\sigma} \sigma^n \Omega d\sigma = \frac{\sigma^{n+1} \Omega}{n+1}$$

Дополнительная работа для всего бруса

$$\tilde{R} = \int_V R dV = \int_V \frac{\sigma^{n+1} \Omega}{n+1} dV$$

Так как брус находится в условиях чистого изгиба и равномерно нагрет, имеем

$$\tilde{R} = \frac{\Omega 2lb}{n+1} \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma^{n+1} dy \quad (7.21)$$

где b и h — ширина и высота поперечного сечения; l — длина бруса. Допустим, как это было предложено Л. М. Качановым, что распределение напряжений в поперечном сечении бруса при установившейся ползучести может быть представлено в виде

$$\sigma = \sigma^0 + k(\sigma' - \sigma^0) \quad (7.22)$$

где σ^0 — напряжения в пределах упругости; σ' — напряжения в предельном (чисто пластическом) состоянии.

Поскольку для прямоугольного сечения

$$\sigma^0 = \frac{4M}{bh^2}, \quad \sigma' = \frac{12My}{bh^3}$$

имеем

$$\sigma = \frac{4M}{bh^2} \left[1 + k \left(\frac{3y}{h} - 1 \right) \right] \quad (7.23)$$

Подставляя эту величину в формулу (8.21), получаем

$$\tilde{R} = \frac{2^{2n+3} M^{n+1} \Omega l}{(n+1) h^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \left[1 + k \left(\frac{3y}{h} - 1 \right) \right]^{n+1} dy \quad (7.24)$$

Согласно принципу минимума дополнительной работы из всех статически возможных напряженных состояний дополнительная работа для всего тела R принимает минимальное значение только для истинного напряженного состояния. Поэтому для такого состояния

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial k} = 0$$

Подставим в это выражение соотношение (8.24). Тогда получим

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \left[1 + k \left(\frac{3y}{h} - 1 \right) \right]^n \left(\frac{3y}{h} - 1 \right) dy = 0$$

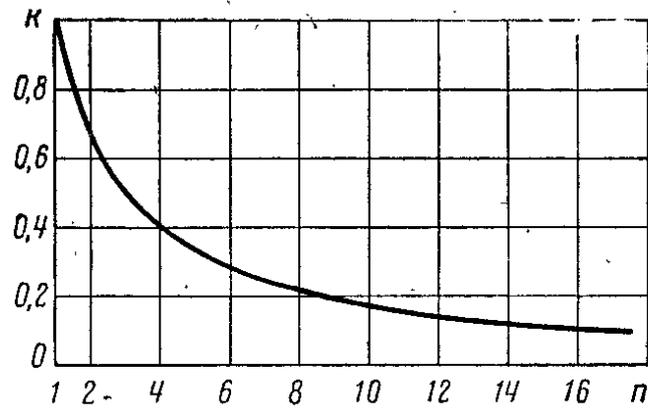


Рис. 8.4. График зависимости коэффициента k от показателя степени n

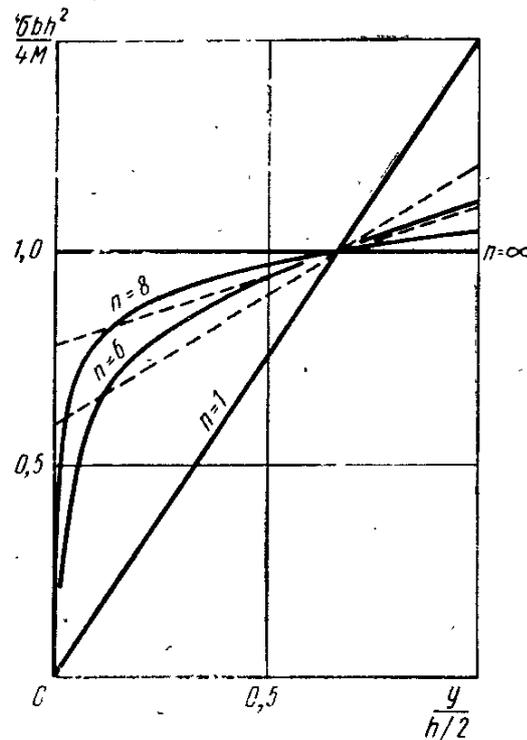


Рис. 8.5. Эпюры безразмерных нормальных напряжений в прямоугольном поперечном сечении изогнутого бруса в условиях установившейся ползучести для различных значений показателя степени n . Сплошные линии эпюры, построенные по точной формуле (8.6). Штриховые линии — эпюры, построенные по приближенной формуле (8.23)

Выполняя интегрирование, выводим уравнение, из которого определяем коэффициент k в зависимости от показателя степени n

$$\frac{1 - \frac{n+1}{2}k}{1 + (n+1)k} = \left(\frac{1-k}{1 + \frac{k}{2}} \right)^{n+1} \quad (7.25)$$

Как следует из формулы (8.25), при $n = 1$ $k = 1$, при $n = \infty$ $k = 0$, чего, на основании выражения (8.22) и следовало ожидать. На рис. 13.4 представлен график зависимости k от n , построенный по формуле (8.25). Сопоставление эпюр (рис. 8.5) показывает незначительное их различие.

4. Библиографический список рекомендуемых источников

4.1. Основная литература

1. Александров А. В. Сопротивление материалов: учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова, 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2001. – 560 с.
2. Головин С. А. Физика прочности и пластичности: учебное пособие для вузов / С. А. Головин. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – 192 с.
3. Горшков А. Г. Теория упругости и пластичности: учебник для строительных вузов / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с.
4. Евтушенко Б. В. Основы теории упругости и пластичности. Тонкие пластинки. Предельные состояния: учебное пособие / Б. В. Евтушенко. – Тула: ТулГУ, 2004. – 106 с.
5. Тутьшкин Н. Д. Технологическая механика: учебное пособие / Н. Д. Тутьшкин, В. И. Трегубов; под ред. Н. Д. Тутьшкина. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2000. – 196 с.

4.2. Дополнительная литература

1. Зубчанинов В. Г. Математическая теория пластичности: монография / В. Г. Зубчанинов. – Тверь: Тверской гос. техн. ун-т, 2002. – 300 с.
2. Ильюшин А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.: Логос, 2004. – 388 с.
3. Тутьшкин Н. Д. Технологическая механика: учеб. пособие для практических занятий / Н. Д. Тутьшкин, В. И. Трегубов, В. Ю. Травин; под ред. Н. Д. Тутьшкина. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. – 83 с.
4. Чуканов А. Н. Физика прочности и пластичности. Точечные дефекты в кристаллах: учеб пособие / А. Н. Чуканов. – Тула: ТулГУ, 2005. – 57 с.
5. Чуканов А. Н. Физика прочности и пластичности. Поверхностные и объемные дефекты в кристаллических материалах: : учеб пособие / А. Н. Чуканов. – Тула: ТулГУ, 2008. – 111 с.

8.3. Периодические издания

1. Проблемы прочности: Международный научно-технический журнал / Институт проблем прочности НАН Украины. Журнал на рус. яз., 1990-2001, 2003-2005, 2006, 2007 – Выходит 6 раз в год.
2. Материаловедение и термическая обработка металлов: научно-технический и производственный журнал.– М: Машиностроение, 1990-2005.
3. Вопросы материаловедения: Научно-технический журнал/ЦНИИКМ– СПб.: Прометей, 2004-2008.

8.4. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

8.4.1 Программное обеспечение

- Пакет программ «Строительные материалы и изделия»
- SCAD Office
- ANSYS

8.4.2 Интернет-ресурсы

- <http://www.bibliotekar.ru/spravochnik-94-stroymaterialy/> - Электронный справочник строительных материалов
- <http://www.stroitel-news.ru/> Строительный блок. Всё самое интересное о строительстве. Новости строительства, статьи, строительная литература.
- <http://djvu-inf.narod.ru/tslib.htm> DjVu БИБЛИОТЕКИ - Строительство и инженерные системы